Od redakcji

Szanowni Czytelnicy!

Z dużą satysfakcją piszę wstęp do tego szczególnego numeru *Semina Scientiarum* — czasopisma naukowego redagowanego przez studentów. Satysfakcja bierze się stąd, iż niemal wszyscy Autorzy artykułów niniejszego numeru byli słuchaczami mojego wykładu monograficznego na temat niezupełności arytmetyki; bądź to w roku akademickim 2002/2003, bądź w roku 2003/2004. Owe artykuły są właściwie owocem wspomnianego wykładu. W pierwszej części wstępu poczynię kilka uwag natury ogólnej, nawiązując do zasadniczej myśli mego wykładu, w drugiej zaś zaprezentuję artykuły.

1.

Oba twierdzenia Gödla i fenomen niezupełności, choć dobrze znane społeczności logicznej i matematycznej, nie zostały jeszcze odpowiednio 'przetrawione', aby stać się pożywką intelektualną dla miłośników mądrości. Mam wrażenie, że w środowisku logików istnieje niepisane prawo 'zabraniające' zajmować się filozoficznymi interpretacjami twierdzeń Gödla. Znana jest anegdota o Alonzo Churchu, który mając wątpliwości, czy dać zaliczenie pewnemu studentowi, miał o nim powiedzieć: *Byłbym skłonny dać mu zaliczenie, gdyby on był skłonny obiecać, że nigdy nie napisze żadnego artykułu o filozoficznym znaczeniu Twierdzenia Gödla*[1]. Wydaje się jednak, że (ze względów czysto statystycznych) musi się ukazać wystarczająco dużo prac filozoficznych na ten temat, aby wśród nich znalazły się prace wybitne.

[1] C. A. Anderson and M. Zelěny (eds.), *Logic, Meaning and Computation,* Kluwer 2001, s. xii.

Według mnie najważniejszymi osiągnięciami logicznymi dwudziestego wieku o mocnym wydźwięku filozoficznym są:

(H) Stworzenie metody formalno–aksjomatycznej przez Hilberta.

(TS) Twierdzenie Skolema–Löwenheima.

(TT) Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy.

(TG) Twierdzenia Gödla o niezupełności (TG1, TG2).

(TC) Teza Churcha.

Ścisłe twierdzenia (TS), (TT) i (TG) w sposób zaskakujący ograniczają metodę Hilberta obiecująco rozwiniętą przez Tarskiego (definicja prawdy) i Gödla (twierdzenie o pełności). (TC) jest kolejnym 'zaskoczeniem' działającym na korzyść (H). O ile (TC) jest prawdziwa, to przynajmniej dla jednego pojęcia intuicyjnego — 'funkcji obliczalnej przez algorytm' — da się podać adekwatną i formalną charakterystykę. Dodatkowo pomiędzy (TG1) a (TC) zachodzi następujący nietrywialny związek[2]:

$$\neg(TG1) \Rightarrow \neg(TC)$$

(TC) jest jedynie tezą, bo nie posiada dowodu. Niektórzy sądzą, że jej ścisły dowód nie jest możliwy. Wiadomo natomiast, jak (TC) sfalsyfikować. Osobiście przypuszczam, że (TC) jest twierdzeniem pewnej nieistniejącej jeszcze nauki, na gruncie której znajdzie empiryczne uzasadnienie. Ma to być nauka o podmiocie i do tego powinna mieć charakter empiryczny. Użyty powyżej zwrot 'mocny wydźwięk filozoficzny' w odniesieniu do osiągnięć logiki można teraz wyrazić następująco: tym wynikom logicznym odpowiadają twierdzenia nauki o podmiocie.

[2]Nazywam go *nietrywialnym* ponieważ nie zakłada się w dowodzeniu tego okresu warunkowego fałszywości (TG1). Por. S. C. Kleene, „Reflections on Church's Thesis", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28 (1987), ss. 490–498.

Dobrze rozumiem, że ktoś może pomyśleć, iż autor tych zdań jest 'nawiedzony'. Dlatego wesprę się autorytetem wielkiego Hilberta. Już w odległym roku 1905, w nieopublikowanym wykładzie pt. *Logische Principien des mathematischen Denkens*, postulował on istnienie nauki metodologicznie wcześniejszej od matematyki i nawet sformułował w przybliżeniu jeden z jej aksjomatów. Ów aksjomat nazwał *Aksjomatem Myślenia* (*Aksjomatem Istnienia Inteligencji*). Wydaje się, że jego treść można wyeksplikować w następujący sposób[3]:

- Ja istnieję i myślę rzeczy (czy też o rzeczach).
- Ja mogę te myślane rzeczy oznaczać za pomocą prostych znaków.
- Ja mogę te znaki zawsze jednoznacznie rozpoznać.
- Ja myśląc operuję pomyślanymi rzeczami za pomocą ich oznaczeń.
- Ja mogę prawa tego operowania poznać przez samo–obserwację.
- Ja mogę te prawa zupełnie opisać.

Ze względu na (TG1) punkt szósty (i czwarty) podanej wyżej Hilbertowskiej charakteryzacji podmiotu wydaje się trudny do zaakceptowania. Z dowodu (TG1) i koncepcji maszyny Turinga można wywieść taki oto wniosek[4]:

(TG1') *Dla dowolnej maszyny Turinga TM, istnieje taka maszyna Turinga TM_1, która zastosowana do maszyny Turinga TM (która ma wyliczać same prawdy arytmetyki i żadnego fałszu) znajdzie prawdę arytmetyki opuszczoną przez TM.*

[3] Aksjomat ten wymaga jeszcze wielu badań.

[4] K. Gödel, „On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. I", [w:] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, ss. 596–616; S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand 1952, pragraf 60.

A stąd już tylko krok do twierdzenia, iż:

(TG1”) *Podmiot myślenia Hilberta nie istnieje.*

Ale (TG1”) nie należy do logiki (metalogiki), lecz do owej postulowanej nauki.

2.

Numer czasopisma, który oddajemy do rąk Czytelnika, zawiera jedenaście artykułów oraz cztery recenzje. Omówię je krótko w kolejności, w jakiej zostały opublikowane.

Artykuły zostały ułożone w taki sposób, aby najpierw przybliżyć Czytelnikowi samą postać Kurta Gödla. Czyni to znakomicie Pan Tomasz Furman, opisując dzieje życia i główne fazy rozwoju naukowego austriackiego logika. W dużej mierze artykuł ten opiera się na książce Dawsona, której recenzja zamieszczona jest także w tym numerze *Semina Scientiarum*.

Siostra Teresa Obolevitch zapoznaje nas z ważnymi (i z dzisiejszej perspektywy ’nieortodoksyjnymi’) poglądami filozoficznym Gödla. W szczególności rozważane są założenia filozoficzne w oparciu o które tworzył Gödel i postawione zostaje pytanie o implikacje filozoficzne twierdzeń o niezupełności.

Artykuł Pani Anny Brożek jest próbą odpowiedzi na pytanie: czy i w jakim sensie twierdzenia Gödla zadały śmiertelny cios programowi Hilberta? Możemy prześledzić intuicyjną zawartość dowodu pierwszego twierdzenia o niezupełności i dowiedzieć się, dlaczego Gödel nie uważał, że zanegował program Hilberta całkowicie. Pani Brożek prezentuje także recenzję książki K. Wójtowicza *Platonizm matematyczny.*

Zdecydowanie najbardziej formalny charakter ma artykuł Pana Leszka Wrońskiego, w którym elegancko podane zostały ścisłe dowody obu twierdzeń Gödla z warunków Bernaysa–Löba oraz pokazano na przykładzie, jakie kłopoty formalne mogą wyniknąć z nieuważnego posługiwania się formułą wyrażającą niesprzeczność arytmetyki[5].

Następny artykuł rozpoczyna serię pięciu prac, w których młodzi filozofowie prezentują swoje własne uwagi na temat tytułowych twierdzeń.

I tak, Pan Robert Piechowicz zastanawia się nad tym, jakie cechy twierdzeń matematycznych sprawiają, ze twierdzenie staje się atrakcyjne matematycznie. Rozważa trzy cechy twierdzenia Gödla: kontekst filozoficzny, ogólność twierdzenia i jego paradoksalność. Ten sam Autor w dziale recenzji omawia niedawno wydaną książkę S. Krajewskiego o twierdzeniu Gödla.

Pani Anna Tomaszewska rozważa tzw. argument Lucasa przeciwko mechanicyzmowi, czyli jedną z najczęściej omawianych filozoficznych konsekwencji twierdzeń Gödla. Przytacza zarzuty najczęściej formułowane pod adresem Lucasa i w szczególności rozważa jeden z nich wykazujący, że argument Lucasa jest sprzeczny.

Pan Paweł Rojek zapoznaje nas z rozważaniami rosyjskiego logika i filozofa W. I. Moisiejewa na temat podobnej struktury generowania zbiorów w antynomii Russella i zdań gödlowskich. Autor próbuje zastosować te rozważania do rozważań z filozofii tradycyjnej – dokładnie filozofii Absolutu[6].

Artykuł Pana Pawła Polaka ma szczególny charakter. Prezentuje samodzielne spostrzeżenia na temat: jakie przymioty musi posiadać podmiot, aby stworzyć system formalny? Jest to zagadnienie, które zaproponowałem Autorowi. Myślę, że w kontekście pierwszej części niniejszego wstępu łatwiej będzie zrozumieć sens tych ciekawych spostrzeżeń.

Artykuł autorstwa Pana Wojciecha Załuskiego omawia rolę, jaką odegrały Aksjomat Determinacji i Aksjomat Wyboru w rozważaniach na temat Hipotezy Continuum. Hipoteza ta jest zdaniem

[5]Przy czytaniu trzeba zwrócić uwagę na to, że w pracy termin ’funkcje rekurencyjne’ znaczy ’funkcje częściowo rekurencyjne’.

[6]Praca ta została napisana w czasie pobytu naukowego Autora na uniwersytecie w Woroneżu (Rosja).

niezależnym od aksjomatyki ZFC, a zatem szczególnym przykładem dla pierwszego twierdzenia Gödla. Artykuł ma za zadanie popularyzację tych bardzo trudnych zagadnień.

Pani Maria Piesko w kolejnym artykule próbuje spojrzeć na wyniki Gödla w kontekście 'programu' Leibniza. Pojawia się przy tej okazji ciekawy wątek ujęcia zdań gödlowskich w takich kategoriach filozoficznych jak *a priori* oraz *analityczność*. Ta sama Autorka w jednej z recenzji bez żadnej litości rozprawia się z książką J. Casti, W. Pauli, *Gödel. Życie i logika*.

W ostatnim artykule Pan Ryszard Philipp z szerokiej perspektywy omawia spór o to, czy umysł jest maszyną, czy też nią nie jest. Bazuje przy tym na twierdzeniach limitacyjnych, do których należy (TG1) i (TG2).

Na koniec chciałbym podkreślić, że Autorzy prac – młodzi filozofowie – studiują zagadnienia bardzo trudne, wymagające dużej staranności i pracowitości. Można przypuszczać, że ludzie ci to przyszłe pokolenie profesorów, którzy za jakiś czas będą prowadzić własne katedry. Ich dynamiczny rozwój intelektualny jest dobrym prognostykiem dla polskiej filozofii, z czego się bardzo cieszę. Chcę w tym miejscu podziękować im za możliwość i zaszczyt prowadzenia dla nich zajęć.

Adam Olszewski