Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

Anna Brożek

Hilbert a Gödel: prawda i dowód w matematyce[1]

Od czasów najdawniejszych matematyka uznawana była za wiedzę pewną i niepodważalną, a jej twierdzenia za bezwzględnie prawdziwe. Wraz z logiką stanowiła wzorzec pewności dla innych nauk. O ile można było wątpić w wyniki nauk empirycznych i w świadectwa zmysłów, o tyle matematyka wydawała się wolna od tego typu problemów. Była zawsze, dzięki oczywistości swoich twierdzeń, ideałem epistemologicznym.

Co decyduje o tym, że przekonania o prawdziwości zdań matematycznych wydają się pewniejsze niż wszystkie inne? Przyjmijmy że „pewne" znaczy tyle, co „dobrze uzasadnione". Matematyczne twierdzenia wydają się ugruntowane tak dobrze, gdyż uzasadnia się je w szczególny sposób. *Prawdy w matematyce zajmują honorowe miejsce w systemie naszych przekonań. Podczas, gdy nasze wierzenia empiryczne – że ziemia jest okrągła, że rośliny wyrastają z nasion, że ciężkie przedmioty spadają – wszystkie są potwierdzone jedynie przez nagromadzenie empirycznych obserwacji czy eksperymentu, w matematyce osiągamy umiłowany ideał oczywistości: mamy* ***dowody***[2]. Wydaje się, że to właśnie specyficzny rodzaj dowodu w matematyce przyczynia się do szczególnego statusu jej prawd.

---

[1] Tytułowym zagadnieniem zainteresowałam się, uczestnicząc w seminarium „Logic and cognition" prowadzonym w roku 2003 na Uniwersytecie w Lipsku przez prof. Ryszarda Wójcickiego. Panu Profesorowi bardzo dziękuję za inspirację. Dziękuję także Redakcji za cenne uwagi, które pozwoliły mi uniknąć wielu błędów.

[2] Maddy [1997], s. 1.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie wzajemnej relacji dowodu i prawdy w matematyce na kanwie zestawienia dokonań matematycznych i poglądów filozoficznych dwóch postaci: Kurta Gödla i Davida Hilberta. W paragrafie pierwszym zarysuję problem dowodu w matematyce i przedstawię ideę systemu zaksjomatyzowanego. Następnie opowiem o pożądanych cechach systemów zaksjomatyzowanych w matematyce (przede wszystkim niesprzeczności) i o zastrzeżeniach, jakie w XIX wieku pojawiły się co do niesprzeczności matematyki. Omówię następnie program sformułowany przez Hilberta – matematyka, który wierząc w ideę dowodu formalnego, pragnął uratować pewność matematyki przed groźbą pojawiających się w jej podstawach antynomii. W paragrafie trzecim opiszę słynne twierdzenia Gödla o niezupełności i ich konsekwencje dla programu Hilberta. Kolejnym krokiem będzie próba analizy poglądów filozoficznych Hilberta i Gödla, które, jak pokażę, miały wpływ na ich pracę nad podstawami matematyki, ich koncepcję dowodu oraz matematycznej prawdy. W końcu omówię konsekwencje, jakie przedstawione zagadnienia mają dla relacji prawdy i dowodu w matematyce.

1. *Calculemus !*

W XIII wieku filozof Raimond Lullus napisał: *pojętność chce, aby rozmaite zasady zostały ze sobą zhierarchizowane, sklasyfikowane, a poza tym sprowadzone do reguł; ażeby rozumienie prawdy w każdej kolejnej nauce dało pewność, że można przyswoić sobie inne nauki*[3]. Lullus wierzył, że da się zbudować uniwersalną i pewną naukę opartą na logice i matematyce. W ramach takiej, obejmującej wszystkie dziedziny wiedzy *mathesis universalis*, każdą prawdę można byłoby ustalić po prostu za pomocą obliczeń, a wręcz manipulacji symbolami. Idea Lullusa, z początku zapomniana, odżyła w filozofii G. Leibniza. Ten siedemnastowieczny filozof i matematyk wierzył, że wszelkie problemy (nawet spory

[3]Cyt. za: Minois [1995], s. 202.

filozoficzne) można rozwiązać, przekształcając argumenty w ciągi matematycznych symboli i dokonując stosownych obliczeń. Sądził nawet, że można zbudować maszynę rozstrzygającą o prawdziwości twierdzeń, gdyż w zasadzie utożsamiał rozumowanie ze – świadomym lub nieświadomym – obliczaniem. Stąd jego słynne wezwanie: *„Calculemus!”*

Geneza marzenia o zbudowaniu uniwersalnej nauki w oparciu o zasady matematyczno–logiczne wydaje się oczywista. Kusząca jest myśl, że w każdej dziedzinie można osiągnąć taką pewność, jaka występuje w naukach dedukcyjnych. Aby wytłumaczyć fenomen tej pewności, wyobraźmy sobie, że ktoś pyta nas, czy prawdziwe jest następujące zdanie matematyczne:

$$2 + 2 = 4. \tag{1}$$

Tym, co sprawia, że bez chwili wątpienia zgadzamy się nazwać je prawdziwym, jest narzucająca się oczywistość zapisanego za jego pomocą rachunku (zakładamy naturalnie rozumienie symboli użytych w jego zapisie). A teraz załóżmy, że ktoś pyta, czy zdanie:

$$27463284672 + 57294625 = 2803679297 \tag{2}$$

jest prawdziwe. Niewątpliwie nasza odpowiedź nie będzie tak szybka, jak w pierwszym wypadku. Każdy jednak, kto przeszedł w szkole kurs arytmetyki, potrafi znaleźć odpowiedź na zadane pytanie przy pomocy kawałka kartki i ołówka – stosując się do zasad pisemnego dodawania. Po zapisaniu kilku symboli na kartce uzyskać można odpowiedź niemal tak pewną, jak odpowiedź na pytanie pierwsze. Na lekcjach matematyki nauczyliśmy się bowiem niezawodnej metody rozwiązywania tego typu matematycznych problemów. Potrafimy, za pomocą dających się ująć algorytmicznie kilku prostych czynności, dodać do siebie każde dwie liczby całkowite. Tym samym znamy procedurę pozwalające rozstrzygnąć, czy zdania arytmetyczne tego typu są prawdziwe. Do rozstrzygnięcia prawdziwości (2) wystarczy umiejętność dodawania w zakresie liczb $1 - 9$ i odpowiedniego operowania symbolami[4].

Czynności wykonywane przy dodawaniu pisemnym można nazwać „dowodzeniem" zdania (2). Pewność tego dowodu bierze się stąd, iż procedura, którą stosujemy, jest niezawodna. Dowód w matematyce nie zawsze jednak opierał się na tak ściśle określonych zasadach, z jakimi mamy do czynienia w działaniach arytmetycznych. Początkowo zbiór zdań matematycznych *nie miał żadnego strukturalnego porządku. Zdanie jakieś uznawano za prawdziwe albo dlatego, że wydawało się intuicyjnie oczywiste, albo dlatego, że zostało udowodnione na podstawie innych, intuicyjnie oczywistych zdań, czyli dlatego, że na podstawie innego intuicyjnie prawdziwego rozumowania okazało się ono konsekwencją logiczną innych zdań*[5]. Matematyk musiał po prostu, w taki czy inny sposób, «przekonać» społeczność uczonych, że teza przez niego dowodzona jest prawdziwa. Dowód taki można nazwać dowodem „w sensie psychologicznym"[6]. Budził on szereg zastrzeżeń ze względu na obecne w nim elementy subiektywne, które matematycy próbowali usunąć.

Wzorem dla ulepszonej teorii dowodu stała się metoda dowodzenia zastosowana w „Elementach" Euklidesa. Z tego dzieła — jak uważa wielu, największego osiągnięcia matematyki starożytnej — wywieść można dwie podstawowe zasady nauk dedukcyjnych. Po pierwsze — budowanie systemu naukowego należy rozpocząć od wymienienia pewnej małej ilości zdań, zwanych aksjomatami, uznanych za prawdziwe bez żadnego dowodu. Po drugie — nie można uznać za prawdziwe żadnych innych zdań, jeśli nie zdoła się ich udowodnić odwołując się do aksjomatów i innych, już dowiedzionych zdań, posługując się mechanizmem logicznym. W celu rozszerzenia ideału Euklidesowego dowodu z geometrii na całą ma-

[4]Osoby lepiej „wyposażone" poradzą sobie jeszcze szybciej przy pomocy kalkulatora lub komputera. Fakt, że komputer może pomóc w odpowiedzi na to pytanie, świadczy o istnieniu algorytmu pozwalającego na sprawdzenie owego obliczenia.

[5]Tarski [1995] s. 319 – 320.

[6]Por. m. in. Tarski [1995], s. 322 oraz Czeżowski [1965].

tematykę, należało więc i w tej ostatniej wprowadzić podział na dwie klasy zdań: tych, które nie są dowodzone (aksjomatów), oraz tych wymagających dowodu. Rozwój tworzonych w ten sposób tzw. systemów aksjomatycznych polegał na stopniowym ograniczaniu liczby zdań pierwszej klasy, a rozszerzaniu klasy drugiej. Im mniejszą liczbę bardziej oczywistych podstaw ma nauka, tym wydaje się lepiej uprawomocniona.

W XIX wieku, za sprawą G. Fregego, wykształciło się specyficzne pojęcie dowodu w matematyce (czy szerzej w naukach dedukcyjnych) – pojęcie dowodu formalnego, które miało zastąpić stare, nieostre pojęcie dowodu psychologicznego. Sprecyzujmy, na czym polega jego specyfika. Przez „system formalny" rozumiemy system (język?), który spełnia następujące warunki: (a) posiada dobrze zdefiniowany słownik używanych w nim symboli oraz (b) określa ściśle sposób tworzenia za ich pomocą poprawnych wyrażeń (reguły formowania). W dalszej kolejności (c) pewne z tych wyrażeń uznane zostają za aksjomaty, oraz (d) podaje się tzw. reguły inferencji (dowodzenia), pozwalające ze zdań już uznanych wyprowadzać dalsze twierdzenia systemu (np. *modus ponendo ponens*). Przez „dowód formalny" w takim systemie rozumie się ciąg zdań lub formuł zdaniowych, który zawiera: wyrażenia przyjęte jako aksjomaty, wyrażenia otrzymane z aksjomatów w wyniku ich przekształceń zgodnie z regułami dedukcyjnymi; dalej ewentualnie wyrażenia powstałe z przekształceń poprzednich wyrażeń. Ostatnim zdaniem w ciągu jest zdanie dowodzone[7].

W dowodzie formalnym poszczególne twierdzenia są wyrażone w języku sformalizowanym – za pomocą ściśle określonego zbioru symboli, a stosowane w nim dyrektywy dowodowe są dyrektywami strukturalnymi. Dowody formalne sprowadzają się więc do przekształceń napisów wykonywanych według zasad określonych przez system. W praktyce można posługiwać się nimi abstrahując od znaczeń stosowanych w nich symboli, a znalezienie dowodu formalnego dla dowolnej dobrze zbudowanej formuły okazuje się spra-

[7]Por. Marciszewski [1998], s. 24.

wą kombinowania symboli. Dowodząc formalnie matematycznego twierdzenia, możemy działać w mechaniczny sposób – szukamy dozwolonego przez reguły dowodzenia «przejścia» od aksjomatów do dowodzonej formuły. Ten nowy, formalny typ dowodu miał swoje wady i zalety. Z jednej strony, dzięki wyeliminowaniu metod intuicyjnych w dowodzeniu twierdzeń, nowa teoria dowodu zapewniała intersubiektywność kontroli jego przebiegu. Dlatego pojęcie dowodu formalnego wydawało się początkowo triumfem logiki i matematyki. Z drugiej jednak strony, rozumienie dowodu jako ciągu symboli kłóci się z naszymi intuicjami: niczego tam się bowiem nie «dowodzi». Zauważmy, że w dowodzie formalnym zdanie prawdziwe to zdanie będące mechanicznie wywiedzioną konsekwencją przyjętych aksjomatów. Czy jednak pojęciem konsekwencji da się zastąpić pojęcie prawdy?

Teorię wyposażoną w aksjomaty i w pojęcie dowodu nazywamy „sformalizowaną". Zastanówmy się teraz, jakie są pożądane cechy takiej teorii, powracając w tym celu jeszcze raz do rozpatrzonego przykładu zdania (2). Załóżmy, że nasze pisemne dodawanie wykazało, iż zdanie (2) jest prawdziwe. Jednakże w celu upewnienia się co do naszej odpowiedzi, wykonujemy obliczenia jeszcze raz. Tym razem nasze obliczenia prowadzą do wniosku, że zdanie (2) nie jest prawdziwe. Co robimy? Przypuszczalnie większość z nas zdecyduje się jeszcze raz wykonać obliczenia, sądząc, że za którymś razem w rachunki wkradł się błąd. Dlaczego jednak obliczenia nie mogą prowadzić do różnych wyników? Dlaczego wynik dodawania dwóch takich samych liczb nie może raz być taki, a raz inny? Powodem jest tzw. zasada niesprzeczności. Dwa zdania nawzajem ze sobą sprzeczne nie mogą być równocześnie prawdziwe. $2+2$ zawsze jest równe 4. Nie może zdarzyć się, że wynik wynosi raz 4, a raz 5.

Dobra teoria zaksjomatyzowana nie powinna dopuszczać, by z jej aksjomatów dało się wywieść dwa zdania ze sobą sprzeczne. Nie jest to jednak jedyna pożądana jej cecha. Jeśli dowód formalny miałby być jedyną metodą dowodzenia prawdziwości zdań w danym w systemie, należałoby jeszcze pokazać, że za jego pomocą można o każdym zdaniu rozstrzygnąć, czy jest prawdziwe, czy nie. Inaczej mówiąc, powinien istnieć dowód formalny dla każdego zdania prawdziwego w systemie. Własność dowodliwości wszystkich prawd danego systemu nazywa się „pełnością”[8].

2. *Wir wollen wissen* czyli program Hilberta

Niesprzeczność jest, jak uważa wielu, podstawową zasadą ludzkiego myślenia i dlatego na sprzeczności w najpewniejszej z nauk – matematyce – nie można się zgodzić. Tymczasem w XIX wieku pojawiły się w matematyce paradoksy (antynomie), stawiające niesprzeczność matematyki pod znakiem zapytania. „Antynomiami” nazywa się rozumowania, które wydają się poprawne, ale które prowadzą do sprzeczności. Powodują, że w ramach jednego systemu formalnego dowodliwe są dwie tezy o postaci „A” i „$\neg A$”. Antynomie pojawiły się w dziewiętnastowiecznej matematyce głównie za sprawą Cantorowskiej teorii mnogości. Przykładami są np. paradoks zbioru wszystkich zbiorów Cantora i antynomia Russella. Matematycy i filozofowie matematyki próbowali się pozbyć paradoksów ze swojej dziedziny. Przecież – jako sprzeczna – matematyka przestawała być pewna i niepodważalna. Na dodatek teoria zawierająca sprzeczności, dzięki zasadzie *ex contradictione quodlibet*, pozwala na udowodnienie każdej tezy. Stąd dający się zaobserwować na przełomie XIX i XX stulecia wzrost zainteresowania problemami podstaw matematyki i liczne pomysły na to, jak z niej usunąć niepożądane paradoksy.

Na ogół mówi się o trzech głównych programach, rewidujących podstawy matematyki. Logicyści (jak G. Frege i przez pe-

[8] Należy tu zwrócić uwagę na rozróżnienie między „pełnością” systemu, i dwoma rodzajami jego „zupełności”. Pierwsze pojęcie jest semantyczne, dwa dalsze – syntaktyczne. System jest (semantytcznie) pełny, jeśli wszystkie twierdzenia, które są w nim prawdziwe, są w nim też dowodliwe. System jest zupełny1, gdy z dwóch formuł o postaci A oraz (A co najmniej jedna jest twierdzeniem systemu. Jest zaś zupełny2 (zupełny w sensie Posta), gdy każda formuła niedowodliwa w tym systemie po dołączeniu do aksjomatów czyni tę teorię sprzeczną. (Por. Marciszewski [1987], s. 32 – 33).

wien czas B. Russell) wierzyli, że da się sprowadzić matematykę do logiki i w ten sposób przywrócić jej miano wiedzy pewnej. Tak zwani intuicjoniści (np. L. Brouwer) postulowali pozbycie się paradoksów poprzez ograniczenie dziedziny dociekań matematycznych i usunięcie z niej wszystkich tzw. elementów niekonstruowalnych, do których należały według nich m.in. pojawiające się w teorii Cantora nieskończoności. Trzecim pomysłem na usunięcie antynomii i odzyskanie pewności matematyki był sformułowany w latach dwudziestych XX wieku program Hilberta. Przeciwstawiając się pomysłom intuicjonistów, ten wybitny matematyk wypowiedział swoje słynne zdanie: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können*[9]. David Hilbert był «rasowym» matematykiem i sądził, że pozbycie się tak dobrego narzędzia w rękach matematyków, jakim okazała się teoria mnogości, byłoby niepotrzebnym ograniczeniem w ich pracy. Uważał, że nie można po prostu pozbyć się wszystkiego, co sprawia trudność i trzeba raczej próbować uprawomocnienia stosowania metod nieskończonościowych. Zadaniem, jakie Hilbert postawił matematykom w swoim programie, było uzasadnienie całej matematyki, łącznie z jej częścią infinitystyczną. Jego strategia obejmowała kilka etapów. Po pierwsze, uważał, należało (1) wydzielić część matematyki, która «nie sprawia kłopotów», nie generuje paradoksów. Hilbert sądził, że tą częścią matematyki jest jej część finitystyczna. Następnym krokiem miała być (2) rekonstrukcja całej matematyki (także owej infinitystycznej, «kłopotliwej») w jednym systemie formalnym. W końcu należało (3) dowieść niesprzeczności tego systemu przy pomocy metod finitystycznych. Przyjrzyjmy się nieco bliżej tym krokom.

Na czym opiera się finitystyczna część matematyki „nie budząca zastrzeżeń”? Według Hilberta jest to matematyka mówiąca o wielkościach dyskretnych – takich, jak liczby naturalne[10]. Dużą

[9] Nikt nie powinien nas wypędzać z raju, do którego wprowadził nas Cantor.

[10] Zaznaczmy, że często zwraca się uwagę na fakt, iż Hilbert nigdy nie sprecyzował wyraźnie, co znaczy „finitystyczny”

rolę w formułowaniu finitystycznego programu odegrała aksjomatyzacja arytmetyki dokonana przez Giuseppe Peano. Definiując liczby naturalne oraz charakteryzując podstawowe działania przy użyciu jednej funkcji (następnika), Peano zbudował system zawierający zaledwie kilka aksjomatów, stanowiących podstawę całej arytmetyki. Hilbertowi wydawało się, że pokazując związki między matematyką finitystyczną a infinitystyczną, da się dokonać uprawomocnienia stosowania metod wykorzystujących cantorowskie nieskończoności. Z «raju cantorowskiego» nie trzeba by było wychodzić. Hilbert, wraz ze swoimi uczniami, postawił sobie taki właśnie cel — pokazać niesprzeczność matematyki finitystycznej, a następnie, dzięki wykazaniu, że rachunek nieskończonościowy da się wyprowadzić ze skończonego, «rozciągnąć» niesprzeczność i pełność na całą, także infinitystyczną matematykę. Niesprzeczność była oczywiście podstawowym postulatem każdego systemu matematycznego. Hilbert był jednak także przekonany, że postulowany przez niego duży system formalny powinien cechować się także zupełnością, czyli każde jego twierdzenie lub jego negacja powinno mieć formalny dowód.

We wrześniu 1930 roku w Królewcu odbyła się konferencja z udziałem najwybitniejszych matematyków tego czasu, na której Hilbert jeszcze raz wyłożył swój program. W trakcie tej samej konferencji młody matematyk, Kurt Gödel, przedstawił jako wynik swej pracy doktorskiej dowód pełności logiki pierwszego rzędu. Dowiódł, że każde prawdziwe logicznie zdanie (tautologia) rachunku predykatów jest dowiedlne w rachunku predykatów, czyli że istnieje dla niego formalny dowód. Twierdzenie o pełności Gödla było etapem na drodze do realizacji programu Hilberta, po wcześniejszym dowodzie pełności rachunku zdań Posta i Bernaysa. (Rachunek pierwszego rzędu jest bowiem rachunkiem silniejszym, zawierającym w sobie rachunek zdań.) Hilbert oczekiwał tego wyniku, o czym wspominał już w 1928 roku w artykule o podstawach matematyki. Zaprezentowany dowód pełności rachunku predykatów był bez wątpienia wynikiem dającym nadzieję na pełną realizację programu Hilberta i wydawało się, że autor programu finitystycznego ma w Gödlu «sprzymierzeńca». W takim przeświadczeniu Hilbert opuścił konferencję.

Tymczasem tuż przez zakończeniem obrad Gödel postanowił przedstawić jeszcze jeden swój wynik, który okazał się jednym z najbardziej zaskakujących w matematyce. W powszechnym przekonaniu zapewnił on też Gödlowi tytuł jednego z największych matematyków w historii. Gödel, używając środków preferowanych przez Hilberta, dowiódł, iż niesprzeczność i pełność arytmetyki liczb naturalnych nie mogą zachodzić równocześnie, a dowodu niesprzeczności nie da się przeprowadzić w ramach systemu formalnego, zawierającego w sobie arytmetykę liczb naturalnych. Jak się uważa, twierdzenia Gödla pozbawiły Hilberta nadziei na pełną realizację programu.

Kilka dni po zakończeniu konferencji w Królewcu Hilbert, nie uświadamiając sobie jeszcze rangi odkrycia Gödla, dał w wywiadzie radiowym wyraz swojemu matematycznemu optymizmowi, mówiąc: *Wir müssen wissen, wir werden wissen*[11]. Tymczasem wynik Gödla poddał drugi człon tego zdania w wątpliwość...

3. *Ignorabimus*. O dowodzie Gödla[12]

Celem Hilberta było wykazanie niesprzeczności i pełności klasycznej matematyki. Aby to osiągnąć, należało pokazać, że klasa zdań prawdziwych w danym systemie formalnym jest identyczna z klasą zdań dowodliwych w tym systemie. Inaczej mówiąc, że każde zdanie wywiedzione za pomocą reguł dowodowych z aksjomatów jest prawdziwe i odwrotnie – każde zdanie prawdziwe posiada dowód formalny. Ponieważ aksjomaty «uznaje się» za prawdziwe

[11] Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć.

[12] Niniejszy paragraf jest (z konieczności skrótowym) omówieniem wyniku Gödla. Zdaję sobie sprawę, że może pojawić się w nim wiele niedomówień i niejasności. Dokładniejsze, a równocześnie klarowne (w moim przekonaniu) omówienie twierdzeń Gödla można znaleźć w: Dadaczyński [2000] oraz Nagel [1996].

a reguły dowodzenia uważa się za poprawne reguły wyprowadzania konsekwencji przyjętych aksjomatów, jasne jest, że klasa zdań dowodliwych zawiera się w klasie zdań prawdziwych[13]. Ażeby jednak stwierdzić identyczność owych dwóch zbiorów zdań, musiałoby jeszcze zachodzić zawieranie odwrotne: zbioru zdań prawdziwych w zbiorze zdań dowodliwych. Z kolei aby udowodnić, że owo drugie zawieranie nie zachodzi, wystarczyłoby wskazać jedno zdanie prawdziwe, a nie posiadające dowodu. Założeniem i przekonaniem matematyków było, że każda prawda matematyczna musi mieć dowód, a dowodliwość można wręcz utożsamić z matematyczną prawdziwością. Gödel podał kontrprzykład podważający to mocne założenie i odrzucił, wbrew powszechnym przekonaniom matematyków, utożsamienie dowodliwości i prawdy[14]. W ramach arytmetyki opartej na aksjomatyce Peano i na niezawodnych regułach inferencji pokazał, że przy użyciu takich środków pewnych prawd w matematyce dowieść nie można.

Twierdzenie Gödla jest twierdzeniem metamatematycznym, a dokładniej: metaarytmetycznym. Przez metamatematykę (w węższym tego słowa znaczeniu) rozumie się zdania o matematyce wyrażone za pomocą środków ściśle matematycznych[15]. Ażeby dowieść metaarytmetycznego twierdzenia w ramach danego systemu (dokładniej – arytmetyki z *Principia matematica* Whiteheada i Russela), Gödel posłużył się procedurą tzw. arytmetyzacji. Korzystając z własności systemu sformalizowanego (z aksjomatami,

[13]Podważenie tego zawierania wymagałaby albo podważenia aksjomatów albo reguł derywacji – czyli logiki. Można tak uczynić – gdyż mówi się o paradoksach logiki takich jak paradoks implikacji materialnej.

[14]Gödel musiał bardzo ostrożnie przeprowadzać swój dowód, gdyż, jak po latach napisał w liście do Wanga, prawdziwość wydawała się wówczas podejrzana, a dowodliwość – nie. (Por. Krajewski [2003], s. 190.)

[15]Por. Dadaczyński [2000], s. 15. Choć początki metamatematyki sięgają wieku XIX, to w zasadzie dopiero dzięki szkole Hilberta idea mówienia o matematyce za pomocą samej matematyki nabrała wyraźniejszych kształtów. Postulowane przez Hilberta dowiedzenie niesprzeczności matematyki za pomocą metod finitystycznych wymagało właśnie matematycznego ujęcia metamatematycznych zdań.

regułami inferencji i pojęciem dowodu formalnego), Gödel znalazł sposób na przedstawienie wszystkich zdań metaarytmetyki w tejże arytmetyce. Znalazł procedurę, która pozwoliła dowolne zdanie metaarytmetyczne przedstawić w postaci liczby naturalnej – numeru Gödlowskiego tej formuły. Przypomnijmy, że jednym z założeń programu Hilberta było wykazanie niesprzeczności matematyki za pomocą finitystycznych środków dowodowych. Arytmetyzacja mogła stanowić krok do realizacji tego postulatu.

Każda liczba naturalna daje się rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych. Korzystając z tej własności Gödel pokazał, że każdą formułę metamatematyczną można przestawić jako iloczyn potęg kolejnych liczb pierwszych. Jak tego dokonał? Najpierw przypisał liczby naturalne wszystkim symbolom używanym w metaarytmetyce. Stałym logicznym (takim, jak symbol implikacji, nawiasy, itp.) przypisał Gödel liczby $1 - 10$. Zmiennym liczbowym – kolejne liczby nieparzyste, począwszy od 11. Zmiennym zdaniowym – kwadraty owych kolejnych liczb nieparzystych, a predykatom – ich sześciany. Na przykład kolejnym symbolom zdania $0 = 0$ przypisane były liczby: 6, 5, 6. Numer Gödlowski (g) tego zdania to iloczyn pierwszych trzech liczb pierwszych (bo zdanie zapisane jest za pomocą trzech znaków) podniesionych do potęg o wykładnikach 6, 5, 6, czyli $2^6 * 3^5 * 5^6$, co daje wynik $243\,000\,000$. Ta ostatnia liczba to numer Gödlowski wyjściowej formuły.

Dzięki arytmetyzacji, każdemu zdaniu metaarytmetyki można było przypisać w sposób jednoznaczny jego numer Gödlowski, a liczbę będącą takim numerem jednoznacznie „przetłumaczyć" na formułę metaarytmetyczną. Dzięki temu, że Gödlowi udało się wszystkim zdaniom metamatematyki przypisać jakiś element zbioru liczb naturalnych, metamatematykę można było wyrazić w postaci relacji w zbiorze liczb naturalnych. Dzięki tak zarytmetyzowanemu systemowi Gödel przeprowadził konstrukcję tzw. zdania Gödlowskiego. Przyjrzyjmy się, na czym ona polegała.

Na początek zauważmy, że dowód w sensie formalnym to po prostu ciąg formuł i jako taki również ma swój numer Gödlowski.

Na dodatek musi istnieć ściśle matematyczna zależność między numerem dowodu a numerem zdania dowodzonego. Przecież zdanie dowodzone jest ostatnim elementem ciągu dowodowego. Gödel oznacza relację między zdaniem a dowodem symbolem $Dem(x, y)$, co czytamy: „x jest numerem Gödlowskim ciągu formuł stanowiącego dowód formuły o numerze Gödlowskim y". Zatem zdanie „$\forall x \ \neg Dem(x, y)$" oznacza, że dla każdego numeru x, x nie jest numerem Gödlowskim dowodu formuły o numerze y. To zdanie, «przetłumaczone na metamatematykę», mówi, że nie istnieje ciąg formuł, stanowiący dowód formuły o numerze y. Gödel pokazał, że w pewnym szczególnym przypadku zdania tego typu nie można dowieść, czyli że $\exists y \forall x \ \neg Dem(x, y)$. Skonstruował taką formułę y, dla której nie można dowieść, czy ma ona dowód, czy nie.

Każdej formule, także zawierającej zmienne, da się przypisać liczbę naturalną. Zauważmy, że w szczególnym wypadku można w danej formule A w miejsce zmiennej liczbowej wstawić numer Gödlowski tejże formuły A. Niech numer Gödlowski formuły zawierającej zmienną liczbową wynosi y. Przez formułę $sub(y, 13, y)$ Gödel rozumiał numer Gödlowski zdania powstałego przez podstawienie w formule o numerze Gödlowskim y cyfr oznaczających liczbę y zamiast zmiennej o numerze Gödlowskim 13[16]. Nowa formuła, powstała przez podstawienie za y w wyrażeniu $sub(y, 13, y)$ jakiejś określonej liczby, także posiada swój numer Gödlowski.

Powróćmy do formuł stwierdzających niedowodliwość.
Formuła:

$$\forall x \ \neg Dem(x, sub(y, 13, y))$$

[16]Zastosowany przez Gödla zabieg można opisać następująco. Załóżmy, że dana jest formuła $\exists x(x = sy)$, mówiąca, że istnieje następnik liczby y. Owa formuła, jak każda formuła metaarytmetyczna, posiada numer Gödlowski. Nazwijmy go m. Ponieważ y jest w naszej formule zmienną liczbową (o numerze Gödlowskim 13), można zamiast niej wstawić do owej formuły dowolną liczbę, w szczególności liczbę m. Owa nowa formuła także posiada numer Gödlowski, który można opisać: „numer Gödlowski formuły, którą otrzymuje się z formuły posiadającej numer Gödlowski m przez wstawienie zamiast zmiennej o numerze Gödlowskim 13 cyfr oznaczających liczbę m".

wyrażona w arytmetyce, mówi, że dla każdego numeru x, x nie jest dowodem formuły o numerze $sub(y, 13, y)$. I to zdanie ma swój numer Gödlowski, który da się wyliczyć. Przyjmijmy, że ten numer wynosi n. Możemy teraz w formule $sub(y, 13, y)$ wstawić za zmienną y liczbę n. Otrzymamy zdanie:

$$\forall x \ \ \neg Dem(x, sub(n, 13, n))$$

będące właśnie zdaniem zwanym od nazwiska swego twórcy — „zdaniem Gödlowskim" (G). I ta formuła ma swój numer Gödlowski. Chwila namysłu wystarcza by stwierdzić, że wynosi on $sub(n, 13, n)$. Charakterystyczną cechą G jest to, że odnosi się ono do samego siebie. «Mówi» mianowicie o sobie, że nie jest dowodliwe.

Gödel dowodzi następnie, że G nie da się dowieść, czyli, że jest tak, jak G mówi. Przypomnijmy, że z założenia konieczną cechą systemu aksjomatycznego jest jego niesprzeczność. Zdanie Gödlowskie mówi o sobie, że nie jest dowodliwe. Załóżmy, że G da się udowodnić. Wówczas jest tak, jak G mówi: że G nie daje się udowodnić. Zatem, jeśli dałoby się dowieść G, to dałoby się również dowieść zaprzeczenia tego zdania. Łatwo pokazać, że jest także odwrotnie: jeśli $\neg G$ jest dowodliwe, to dowodliwe jest także G. Możliwość dowodu zdania Gödlowskiego oznaczałaby więc pojawienie się w systemie sprzeczności. Prowadzi to do wniosku, że o ile arytmetyka ma być niesprzeczna, to musi być niezupełna[17].

Jak dotąd Gödel pokazał, że istnieją w arytmetyce zdania nie posiadające dowodu, o których nie możemy matematycznie orzec ani prawdziwości ani fałszywości. Sam fakt istnienia zdań niedowodliwych (niezależnych) nie byłby jeszcze może groźny, gdyby nie

[17]Niedowodliwe zdanie wskazane przez Gödla jest zdaniem metamatematycznym, choć – dzięki zabiegowi arytmentyzacji – także zdaniem matematycznym. Warto tu jednak zaznaczyć, że udało się znaleźć inne zdania niedowodliwe w systemie arytmetyki, ale już o treści «czysto–matematycznej» (czy też interesującej z matematycznego punktu widzenia). Takie zdania odnaleźli J. Parris, L. Kirby oraz L. Harrington w latach siedemdzisiątych i osiemdziesiątyh dwudziestego wieku. (Zob. Murawski [2000], ss. 110–118).

to, że zdanie G, z metamatematycznego punktu widzenia, jest zdaniem prawdziwym. Krajewski tak rekonstruuje metamatematyczne rozumowanie stwierdzające jego prawdziwość: *W trakcie dowodu twierdzenia Gödla pokazaliśmy, że G nie jest dowodliwe w S (systemie aksjomatycznym), jeśli S jest niesprzeczny. G stwierdza jednak, że jest niedowodliwe w S. A zatem jest tak, jak G mówi, czyli G jest prawdziwe. Choć sam końcowy wniosek tego rozumowania wyprowadzony jest „z zewnątrz systemu”, to wszystkie fakty potrzebne do wyciągnięcia wniosku o prawdziwości G i poprawności dowodu dają się wypowiedzieć i dowieść w ramach systemu. Dlatego wątpliwości co do prawdziwości zdania Gödla rzadko pojawiały się wśród matematyków*[18].

Wniosek, jaki można wyciągnąć z pierwszego twierdzenia Gödla brzmi: jeśli arytmetyka jest niesprzeczna, jest niezupełna. Nie ma dowodu dla wszystkich jej prawd, a zatem dowodliwość nie jest tożsama z prawdziwością. Cecha dowodliwości jest zrelatywizowana do konkretnego systemu, podczas gdy prawda matematyczna wydaje się niezależna od jakiegoś stworzonego przez człowieka układu aksjomatów i reguł. Na dodatek, trudności wskazanej przez Gödla – czyli niedowodliwości pewnych prawdziwych twierdzeń – nie da się całkowicie usunąć wprowadzając nowe, silniejsze aksjomaty. Twierdzenie Gödla wykazuje niezupełność wszystkich takich teorii, które dane są efektywnie (czyli takich, które posiadają przeliczalny zbiór aksjomatów i reguł) oraz wystarczająco bogatych, by dało się za ich pomocą wyrazić arytmetykę liczb naturalnych. W każdym takim systemie, mimo kolejnych wzmocnień, pojawią się bowiem nowe niedowodliwe zdania.

Z twierdzenia pierwszego, dzięki jego formalnej analizie, wynika drugi wynik Gödla. Można mianowicie z jego pomocą pokazać, że w ramach systemu aksjomatycznego arytmetyki nie da się dowieść niesprzeczności tejże arytmetyki. Tę konsekwencję referatu Gödla zauważył już von Neumann, w owym czasie bliski współpracownik Hilberta, a nawet dowiódł jej niezależnie od Gödla. Za-

[18]Por. Krajewski [2003], s. 122.

uważmy tu jednak, że drugie twierdzenie Gödla nie mówi, że dowód niesprzeczności arytmetyki w ogóle nie jest możliwy. Nie da się go tylko przeprowadzić wewnątrz niej, za pomocą środków uznanych przez Hilberta za „matematykę nie budzącą wątpliwości”[19].

Najczęściej chyba cytowana wypowiedź Hilberta brzmi: *w matematyce nie ma żadnych ignorabimus.* Gödel pokazał, że prawdopodobnie «jakieś *ignorabimus*» będą w matematyce istnieć zawsze. . .

4. *Werden wir wissen?* czyli o strategiach rozwiązywania problemów matematycznych

Zatrzymajmy się tu na chwilę, by przedstawić analizę poglądów filozoficznych Hilberta i Gödla. Zastanowimy się, jaki wpływ miały one na pracę w dziedzinie matematyki i jak determinowała ona stosowaną przez obu matematyków metodologię. Hilbert mówił w swym wystąpieniu z 1900 roku (w którym przedstawił zestaw 20 doniosłych i nierozwiązanych problemów matematycznych): P*rzekonanie o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego stanowi doskonałą motywację dla matematyka. Słyszymy ciągłe wezwanie: Oto problem. Poszukaj jego rozwiązania*[20]. Także Gödel był «optymistą» w matematyce – pomimo dowodu twierdzenia o niezupełności. Obaj uważali, że pytania matematyczne są dobrze postawione, że można na nie odpowiedzieć i że nawet sprzeczności i antynomie pojawiające się w ramach ich dziedziny dadzą się ominąć lub wytłumaczyć. Zarówno Hilbert, jak i Gödel wierzyli, że da się utrzymać pogląd uznający matematykę za wiedzę pewną i bezwzględnie prawdziwą. Różnie jednak uzasadniali filozoficznie to przekonanie. Na przestrzeni wieków pojawiły się co

[19]W istocie dowód niesprzeczności arytmetyki został przeprowadzony m. in. w 1936 roku za sprawą ucznia Hilberta, G. Gentzena, z tym, że nie został on przeprowadzone w systemie arytmetyki i nie obyło się bez środków nie–finistycznych. Zatem nie realizował programu Hilberta w jego pierwotnym sformułowaniu.

[20]Hilbert [1901].

najmniej dwie koncepcje filozofii matematyki, które pozwalały na ugruntowanie jej jako wiedzy pewnej. Nazywa się je – od imion twórców – „platonizmem" i „kantyzmem". Postaram się pokazać, że optymizm Gödla oparty był na jego platońskich przekonaniach filozoficznych, podczas gdy Hilbert inspirował się filozofią matematyki Immanuela Kanta.

W realizmie platońskim prawda matematyczna jest ugruntowana «metafizycznie». Platon wierzył, że przedmioty matematyczne istnieją w świecie idealnym, niezależnym od świata fizycznego, a dostęp do nich mamy dzięki sile intelektu. Dzięki idealnemu, niezmiennemu istnieniu matematycznych obiektów, w matematyce nie ma miejsca na niepewność. Matematyka była dla Greków wzorem *episteme*, czyli wiedzy pewnej, którą przeciwstawiali oni prawdopodobnej *doxa*. Inaczej pewność matematyki ugruntowuje Immanuel Kant. W jego *Krytyce czystego rozumu* pojawia się koncepcja matematyki jako wiedzy syntetycznej *a priori*. Twierdzenia matematyki są pewne, gdyż są niezależne od zawodnego doświadczenia, a ich konieczność wynika z konstrukcji ludzkich władz poznawczych. Matematyka jest ugruntowana w tzw. formach naoczności czasu i przestrzeni, dzięki którym poznajemy świat w trzech wymiarach przestrzennych i jednym czasowym. Jest dzięki temu wiedzą bezpośrednią, intuicyjną. W *Krytyce czystego rozumu* pojawia się kantowskie, bardzo specyficzne rozumienie intuicji. Według Kanta, intuicyjna matematyczna wiedza *a priori* opiera się na mentalnych przedstawieniach indywiduów czasoprzestrzennych. Przedmiotem intuicji jest to, co może stać naraz i bezpośrednio przez naszymi oczami i co można sobie bezpośrednio wyobrazić. Mówiąc inaczej, wszystko co człowiek może sobie przedstawić jako indywiduum, jest intuicyjne[21].

[21] Por. Hintikka [1991]. Pisze on, że u Kanta: *Intuitivity is simply individuality.* Hintikka dodaje, że nie ma nic «intuicyjnego» w takim rozumieniu intuicyjności. Jest to po prostu silne założenie filozoficzne. Należy tu zaznaczyć, że istnieją inne interpretacje kantowskiej teorii intuicji. Na przykład I. Dąbska (w: Dąbska [1978]) twierdzi, że rozumienie intuicji matematycznej Kanta jako

Najbardziej podstawowe prawdy arytmetyczne można ugruntować dzięki bezpośredniemu spostrzeganiu przedmiotów jednostkowych. Pozostała wiedza matematyczna jest, według Kanta, skonstruowana na podstawie tych pierwotnych intuicji. Filozof z Królewca definiuje matematykę jako *czystą wiedzę a priori, która opiera swe poznanie jedynie na konstrukcji pojęć na podstawie intuicyjnego wyobrażenia przedmiotu*[22]. Według Kanta, złożone przedmioty matematyczne nie są, jak u Platona, bytami samoistnymi, a pochodzą z apriorycznej konstrukcji podmiotu. Choć jednak Kant uznawał wiedzę a priori za konstruowaną niezależnie od zmysłowego doświadczenia, to uważał, że zdobycie takiej wiedzy może się dokonać dopiero wtedy, gdy nasz umysł zostanie wyposażony w «jakieś» poznanie. Warto tu znów zacytować filozofa z Królewca:

> *Matematyczne poznanie* [jest] *zaś poznaniem na podstawie konstrukcji pojęć. Skonstruować zaś pojęcie to znaczy przedstawić odpowiadającą mu naoczność a priori. Dla konstrukcji pojęcia wymagana jest więc naoczność nieempiryczna, która przeto – jako naoczność – jest przedmiotem jednostkowym* [...]. *Konstruuję więc trójkąt przedstawiając przedmiot odpowiadający temu pojęciu albo za pomocą samej tylko wyobraźni w naoczności czystej, albo wedle niej także na papierze w naoczności empirycznej, ale w obu wypadkach całkowicie a priori, nie zapożyczając na to wzoru z żadnego doświadczenia*[23].

sposobu percepcji znaków liczbowych (przyjęte przez Hilberta i Hintikkę) jest mylne. Por. też Dadaczyński [2000], ss. 181–183.

[22]Kant, *Metaphysische Anfangsgrunde der Naturwissenschaft*, cyt. za: Dadaczyński [2002], s. 181.

[23]Kant [2001], s. 540, 713.

Porównajmy te poglądy Kanta z wypowiedzią Hilberta:

> *Coś musi być już dane w przedstawieniu jako warunek wstępny dla zastosowania wnioskowań i wykonywania operacji logicznych: są to mianowicie pewne pozalogiczne konkretne przedmioty, które tam występują poglądowo, jako bezpośrednie przeżycia. Jeżeli myślenie logiczne ma być pewne, to przedmioty te muszą całkowicie dać się ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach* [...]. *Takie jest podstawowe stanowisko filozoficzne, które uważam za potrzebne dla matematyki i w ogóle dla całego naukowego myślenia, rozumienia i porozumiewania się*[24].

Dochodzimy tu do źródła finitystycznej strategii Hilberta. Posiadamy intuicję skończonych indywiduów, a wiedza o nich narzuca się nam z niepowątpiewalną oczywistością. Pewność matematyki można ugruntować właśnie na postrzeganiu bezpośrednio dyskretnych obiektów, a w szczególności potrafimy rozpoznawać symbole takie, jak ciągi: I, II, III, IIII. Bezpośrednie ich poznanie daje nam wiedzę o liczbach naturalnych – dlatego prawdy ich dotyczące wydają się niepodważalne. Według Hilberta, podobnie jak w filozofii Kanta, pozostałą część matematyki można skonstruować dzięki tej niewzruszonej podstawie i operacjom logicznym.

Przypomnijmy jeszcze jedną istotną tezę Kantowskiej filozofii matematyki — stosunek do nieskończoności. Filozof z Królewca nie uznawał istnienia nieskończoności aktualnej. Określał ją jako ideę czystego rozumu — punkt graniczny naszego poznania. Nieskończoności nie możemy poznawać bezpośrednio, nie może być nam dana. Wydaje się, że i ten pogląd przejął Hilbert od Kanta i stąd jego, jak się często mówi, instrumentalistyczne traktowanie metod teorii mnogości. Łatwo teraz zrozumieć, dlaczego Hilbertowi był

[24]Hilbert, *Uber das Unendliche*, cyt. za: Murawski [2001], s. 125–126.

potrzebny mocny program finityzmu — należało uprawomocnić posługiwanie się czymś, co nie jest nam w żaden sposób dane[25].

Hilbert dzielił matematykę na realną i idealną. Realna matematyka to ta, która «nie sprawia kłopotów», w ramach której nie pojawiają się paradoksy. W szczególności była to matematyka bez nieskończoności. Matematyka zawierająca kantorowską teorię mnogości zwana była przez Hilberta – po linii kantowskiej – matematyką „idealną". Ta «idealność» pojęcia nieskończoności nie przesądza o porzuceniu teorii mnogości. Hilbert uważa jedynie, że *musimy ustanowić w całej matematyce taką samą pewność wnioskowań, jaka ma miejsce w elementarnej teorii liczb, gdzie nikt nie ma wątpliwości, i gdzie paradoksy i sprzeczności powstają tylko przez nieuwagę*[26]. Można powiedzieć, że program Hilberta miał doprowadzić do ugruntowania matematyki idealnej za pomocą realnych środków.

Gödel, jako platonik, uznawał całą matematykę (także nieskończonościową) za realną, a jej przedmioty za istniejące rzeczywiście, choć niezależnie od świata fizycznego i ludzkiego umysłu. Napisał:

> *Pojęcia i klasy mogą być potraktowane jako obiekty rzeczywiste* [...]. *Wydaje się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych. Filozofia matematyki powinna i musi być metafizyczna*[27].

---

[25]Hilbert odwoływał się także do wyników fizyki, które zdają się przeczyć istnieniu w świecie nieskończoności. Musimy tu zaznaczyć, że do Kanta (nawet bardziej bezpośrednio) odwołuje się też nurt intuicystyczny w filozofii matematyki. Jego protoplasta – Kronecker powiedział kiedyś, że „Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, reszta jest dziełem człowieka". Wnioski intuicjonistów szły jednak o wiele dalej, niż hilbertowska interpretacja Kanta. Szczególną rolę przywiązywali do tzw. konstruowalności przedmiotów matematyki. Na przykład uważali, że matematykę nieskończonościową należy wyeliminować jako niekonstruowalną. Hilbert natomiast nie wykluczał ze swoich dowodów metod nie–konstruktywistycznych, a niesprzeczność, nie zaś konstruowalność, uznawał najważniejszy warunek matematycznego systemu.

[26]Hilbert [1986], s. 296.

[27]Gödel [1990], ss. 119–153.

Ale Gödel również wprowadził w matematyce podział, choć zasadniczo inny niż ten Hilbertowski: na matematykę obiektywną i subiektywną. Pierwsza stanowi ogół prawdziwych zdań o istniejących obiektywnie bytach matematycznych. Matematyka subiektywna zaś to ogół zdań dowodliwych w jakimś konkretnym matematycznym systemie. Są to twierdzenia, którą formułują ludzie, badając świat matematyki obiektywnej. Dokonują tego za pomocą intuicyjnego analizowania jej pojęć.

Zaznaczmy od razu, że „intuicję" rozumie Gödel zupełnie inaczej niż Hilbert. Pisze:

> *Należy zauważyć, że intuicja matematyczna nie powinna być uważana za zdolność, która daje bezpośrednią wiedzę o analizowanych obiektach.* [...] *Wydaje się raczej, że podobnie jak w przypadku doświadczenia fizycznego, formułujemy nasze idee na gruncie czegoś innego niż to, co jest dane bezpośrednio, w sposób natychmiastowy. To coś innego tutaj nie jest, a przynajmniej nie jest głównie, wrażeniem. Fakt, że coś jeszcze oprócz wrażeń jest dane w sposób natychmiastowy, wynika (niezależnie od matematyki) z tego, że nawet idee odnoszące się do obiektów fizycznych posiadają w sobie coś, co nie wynika z obserwacji – na przykład ideę obiektu. Oczywiście to, co dane w matematyce, jest ściśle związane z abstrakcyjnymi elementami zawartymi w naszych ideach empirycznych. Nie wynika stąd jednak, że te dane drugiego rodzaju, jak twierdził Kant, są czymś czysto subiektywnym, ponieważ nie mogą być związane działaniem określonych przedmiotów na nasze organy. Przeciwnie, one też mogą wyrażać jakiś aspekt obiektywnej rzeczywistości, a ich pojawienie się może wynikać z innej relacji pomiędzy nami a rzeczywistością*[28].

[28]Gödel [2003], s. 121.

Matematyka subiektywna zbliża się do matematyki obiektywnej, odkrywając coraz więcej jej prawd, podobnie, jak fizyka zbliża się do adekwatnego opisu świata materialnego. Tak jak świat fizyczny, matematyczne obiekty (także np. zbiory nieskończone) istnieją obiektywnie i nie są tylko ludzką konstrukcją. Dostęp do prawd o nich mamy poprzez analizę pojęć matematycznych, ale ta analiza nigdy nie będzie pełna. Zbiór zdań prawdziwych matematyki obiektywnej tworzy nieprzekraczalną granicę, której nie zdołamy osiągnąć, lecz do której staramy się zbliżyć, rozszerzając stopniowo klasę zdań dowodliwych[29]. Mimo ograniczeń intuicji, poznajemy dzięki niej dużą klasę matematycznych przedmiotów. Jesteśmy w stanie analizować pojęcia matematyczne, nawet te postulowane przez teorię mnogości. Takie analizy pojęć doprowadzają do coraz lepszego ich rozumienia i eksploracji obiektywnej matematyki.

Wobec takich przekonań Gödla widać, że finitystyczne założenia Hilberta nie były mu potrzebne i nie stanowiły nieodzownego warunku uprawomacniającego matematykę. Dlatego miał on inną strategię «radzenia sobie» z paradoksami teorii mnogości. Przede wszystkim Gödel był przekonany, że paradoksy są czysto logiczne, a nie dotyczą matematyki czystej. Obiekty tej ostatniej istnieją obiektywnie i nie ma między nimi sprzeczności. Zatem, jeśli przyjęty system aksjomatyczny nie pozwala na udowodnienie wszystkich prawd lub doprowadza do powstania antynomii, oznacza to, że pojęcia matematyczne w jego ramach nie zostały dostatecznie zanalizowane. Prawdopodobnie należy go więc rozszerzyć o takie aksjomaty, które pozwolą na rozwiązanie problemu. Załóżmy, rozumuje Gödel, że A jest nierozstrzygalnym zdaniem systemu aksjomatycznego S. Zdanie A jest albo bezsensowne, albo prawdziwe, albo fałszywe. Nie możemy go uznać za bezsensowne ze względu na klarowność pojęć stosowanych w jego budowie, może więc być tylko prawdziwe albo fałszywe. Jednakże ani A, ani jego negacja,

[29] Jak się zdaje – na przykład w ujęciu Peirce'a czy Poppera – pojęcie prawdy odgrywa podobną rolę w naukach empirycznych.

nie mogą być dowiedzione w S. Stąd, aby rozstrzygnąć, czy A jest prawdziwe, czy fałszywe, musimy dodać nowy zestaw S_1 aksjomatów do S, budując rozszerzony system aksjomatów $S \cup \{S_1\}$, taki, że za ich pomocą możemy dowieść A lub jego negacji, ale nie możemy dowieść ich obu. Choć rozszerzony system (nasze $S \cup \{S_1\}$) pozwala na rozstrzygnięcie zdania A, to w jego ramach pojawią się inne zdania nierozstrzygalne, wymagające jeszcze silniejszych aksjomatów. Tak będzie w nieskończoność, gdyż, według Gödla, matematyczne pojęcia są niewyczerpane.

> *Konstruowanie coraz wyższych szczebli jest konieczne do dowodzenia twierdzeń dotyczących nawet stosunkowo prostej struktury, a mianowicie twierdzeń arytmetycznych. Istnieją zadania arytmetyczne, które mogą być udowodnione tylko metodami analitycznymi, a nawet przez zastosowanie metod, w których odwołujemy się do bardzo dużych nieskończonych liczb kardynalnych i podobnych rzeczy*[30].

Każde zdanie tzw. niezależne – czyli takie, które jest niedowodliwe i niedowodliwa jest także jego negacja – może zostać dołączone do aksjomatów, nie wywołując sprzeczności. Takimi niezależnymi, jak wykazał Gödel, zdaniami są między innymi: zdanie Gödlowskie, aksjomat wyboru i hipoteza continuum.

Bez wątpienia odkrycie niezupełności arytmetyki mogło dla Gödla stanowić uzasadnienie trafności jego założeń ontologicznych. Pokazał, że mamy pozaformalne rozumienie twierdzeń matematycznych oraz dana jest kategoria prawdziwości, którą można stosować do zdań tego typu. Dowodliwość nie jest równoważna prawdziwości. Zdanie Gödlowskie jest prawdziwe w «pozaformalny» sposób, a my widzimy jego prawdziwość spoza systemu, w ramach którego zostało sformułowane.

[30] Gödel [1995] s. 48.

5. Od programu Hilberta do programu Gödla

Gödel dowiódł zatem, że formalnie – przy pomocy metod preferowanych przez Hilberta – nie da się dowieść niesprzeczności arytmetyki. Jeśli arytmetyka jest niesprzeczna, jest także niezupełna, bo istnieją zdania prawdziwe, ale w jej ramach niedowodliwe. W tym ostatnim paragrafie postawimy sobie dwa pytania. Po pierwsze: czy i w jakim stopniu Gödel położył kres programowi Hilberta? Po drugie: czy Gödel skutecznie i trwale oddzielił pojęcia prawdy i dowodu?

Twierdzenie Gödla wywołało ferment wśród badaczy podstaw matematyki, choć nie stało się to z dnia na dzień. Przypuszczalnie matematycy nie od razu dostrzegli doniosłość twierdzenia. Na przykład H. Reichenbach, podsumowując słynną konferencję w Królewcu, nawet nie zwrócił uwagi na drugi referat Gödla[31]. Hilbert podobno początkowo zareagował złością. Musiał zdawać sobie sprawę, że twierdzenie Gödla stawia pod znakiem zapytania sensowność jego programu i wieloletniej pracy. Nie ma jednak całkowitej zgody co do tego, czy wynik Gödla definitywnie kładzie kres programowi finitystycznemu. Wątpliwości co do konsekwencji twierdzenia Gödla dla finitystycznego programu Hilberta wynikają z faktu, że sam ten program był sformułowany niezbyt ściśle. Dla przykładu niedookreślona była idea finityzmu – czy przez „finityzm" rozumiał Hilbert tylko istniejącą już aksjomatyzację matematyki, czy też dopuszczał możliwość innej, lepszej finitystycznej aksjomatyzacji. Dlatego, o ile niektórzy są przekonani, że program Hilberta zakończył się w 1931 roku definitywną klęską, o tyle inni uważają, że wcale tak nie jest[32]. Warto zauważyć, że do tej drugiej grupy należeli (przynajmniej w pewnym okresie) dwaj główni bo-

[31]Podobno tylko Von Neuman – ówczesny bliski współpracownik Hilberta – od razu uznał dowód niezupełności za doniosły, szczególnie dla programu finitystycznego.

[32]Por. Krajewski [2003], ss. 261 i nn. Udowodniono m.in. tzw. twierdzenie Friedmana i Siega, głoszące, że każde twierdzenie matematyczne, które można udowodnić w systemie stanowiącym podsystem Z2, (arytmetyki drugiego

haterowie niniejszego artykułu – Hilbert i Gödel. Hilbert (w przedmowie do książki o podstawach matematyki napisanej wspólnie z Bernaysem) stwierdził:

> *Zazwyczaj utrzymuje się opinię, że z wyniku Gödla wynika niewykonalność mojej teorii dowodu. Ale jego dowód pokazuje tylko, że bardziej zaawansowane teorie niesprzeczności wymagają użycia finistycznych dowodów, które nie mogą być wyrażone w formalizmie P*[33].

Z kolei Gödel, jeszcze w artykule z roku 1931 zaznacza wyraźnie, że jego twierdzenie

> *nie zaprzecza formalistycznym poglądom Hilberta. To podejście presuponuje jedynie istnienie dowodu niesprzeczności, w którym mogą być użyte tylko środki finitystyczne, a jest możliwe, że istnieją takie dowody, które jednak nie mogą być wyrażone w P*[34].

Najrozsądniej jest chyba przyjąć, że twierdzenie Gödla narzuca poważne ograniczenia na program Hilberta. Jeśli może on nadal być realizowany, to tylko w pewnym ograniczonym zakresie.

Hilbert napisał: *Gdzie tylko są jakieś widoki powodzenia, tam chcemy dokładnie badać owocne definicje i metody dedukcji. Chcemy je pielęgnować, wzmocnić i uczynić użytecznymi*[35]. Skoro, co wiemy dzięki twierdzeniu Gödla, nie da się programu przeprowadzić dla całości matematyki, trzeba przynajmniej uczynić to tam, gdzie to możliwe. Choć dzięki twierdzeniom Gödla wiemy, że prawdziwości całej matematyki nie da się wykazać za pomocą finitystycznych operacji (rozumiejąc tu „finitystyczne” wąsko — jako

---

rzędu), nazwany WKL, jest finitystycznie dedukowalne w sensie programu Hilberta. Por. Simpson [2002], s. 200.

[33] Hilbert, Bernays [1934], s. 8.

[34] Gödel [1931], s. 37.

[35] Hilbert [1986], s. 296

„wyrażalne w arytmetyce Peano"), nie oznacza to, że nie da się tego zrobić dla jakiejś części matematyki. Kontynuatorzy programu Hilberta zdają się uważać, że całkiem duża część matematyki może być jednak finitystycznie uprawomocniona[36]. Najciekawszym chyba przykładem kontynuacji badań nad podstawami matematyki w duchu hilbertowskim jest tzw. arytmetyka odwrotna (ang. *reverse mathematics*). Przedstawmy w paru słowach jej ideę[37]. Załóżmy, że dane jest zwykłe twierdzenie matematyki. Wobec każdego takiego twierdzenia możemy zapytać: jakie aksjomaty istnienia zbiorów są potrzebne, aby dowieść tego zdania? «Odwrotność» tego typu dociekań matematycznych polega na tym, że przechodzi się, nie jak w klasycznie pojętym dowodzie — od aksjomatów do ich konsekwencji, a odwrotnie — od gotowych twierdzeń do ich minimalnych założeń ontologicznych.

Warto tu przypomnieć charakterystyczne podejście Gödla do badań nad systemami aksjomatycznymi. W zgodzie ze swym realizmem, Gödel wierzył, że każde zdanie matematyczne jest prawdziwe lub fałszywe. Równocześnie pokazał, że w gotowych już systemach istnieją zdania niezależne (niedowodliwe). Gödel proponował zatem poszukiwanie nowych aksjomatów, które dodane do aksjomatyki teorii mnogości pozwoliłyby na dowiedzenie zdań niezależnych – takich, jak hipoteza continuum. Ten Gödlowski postulat zostały nazwany „programem Gödla"[38]. Łatwo zauważyć, że kierunek dociekań jest tu właśnie «odwrotny», a pomysł wprowadzenia *reverse mathematics* jest prawdopodobnie inspirowany ideami Gödla.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że analiza strategii postępowania w programie Gödla prowadzi do przekonania, iż autor twierdzeń o niezupełności nie neguje doniosłości idei formalnego dowodu matematycznego. Choć twierdzi, że w naszym rozumieniu matematyki jest «coś więcej» niż da się udowodnić za pomocą finistycz-

---

[36]Por. Krajewski [2003], s. 199.

[37]Por. Wójtowicz [2002], ss. 99 i nn.

[38]Por. Wójtowicz [2001], ss. 100–117.

nego systemu formalnego, to sam proponuje poszukiwanie takich aksjomatów, które pozwoliłyby na formalne dowiedzenie uznawanych (intuicyjnie) twierdzeń. Gödel uważa, że dowód jest ważny w matematyce, ale stanowi tylko końcowy etap pracy matematyka. Aby przeprowadzić dowód, należy najpierw zbudować system aksjomatów i reguł dowodowych, a do tego potrzeba rozumienia pojęć matematycznych. Rolę dowodu formalnego widział Gödel raczej — użyjmy określenia z filozofii nauki — tylko w „kontekście uzasadnienia".

Twierdzenie Gödla bywa nadużywane — często słyszy się, że Gödel dowiódł, iż niczego nie możemy dowieść. Tymczasem dowód jest nadal podstawową metodą uzasadnienia prawd matematycznych i tak już pewnie zostanie. Jak napisał Tarski:

> *w rozwoju matematyki nie ma sprzeczności pomiędzy pojęciem prawdy i pojęciem dowodu; pojęcia te nie są na stopie wojennej, lecz pozostają w stanie pokojowego współistnienia*[39].

Pozostaje więc pytanie: jeśli dowód w sensie formalnym służyć miałby przede wszystkim – jak to zdaje się postulować Gödel – w kontekście uzasadnienia, to czy istnieje jakaś inna metoda odkrywania prawd matematycznych, czy też jakieś inne, pozaformalne kryteria pozwalające matematykom na przyjęcie dowodzonych twierdzeń? Czy istnieją inne kryteria matematycznej prawdy? Pod koniec tych rozważań chcę pokazać «kandydata» na takie kryterium, które zaakceptowaliby, przypuszczam, zarówno Hilbert, jak i Gödel. Kryterium to można nazwać „pragmatycznym", a polega ono na wykazaniu skuteczności i użyteczności dowodzonych twierdzeń matematycznych.

Zacznijmy od Hilberta. Przedstawiciel intuicjonizmu, L. Brouwer, nazwał twórcę programu finitystycznego „formalistą". Od tego czasu utarło się określać Hilberta jako głównego przedstawi-

[39] Tarski [1995], s. 332.

ciela tego kierunku, ale istnieją wątpliwości co do słuszności takiego przyporządkowania. Oczywiście rozstrzygnięcie tej kontrowersji zależy od naszego rozumienia formalizmu. Według niektórych, mocnych wersji formalizmu, przedmiotem matematyki są, w dosłownym tego słowa znaczeniu, ciągi napisanych symboli i dokonywane na nich manipulacje. Konsekwentny formalista nie zwraca uwagi na „prawdziwość" aksjomatów i nie starta się jej uzasadnić. Jego wymaganiem jest niesprzeczność aksjomatów, a wszystkie niesprzeczne systemy uważa za równoważne. W zasadzie nie mówi o prawdzie, a o manipulacji symbolami, przypominającej grę o określonych, konwencjonalnych regułach. Każda «gra na symbolach» jest równie dobra. Tak skrajnie rozumiany formalizm nie rozwiązuje szeregu problemów epistemicznych. Przede wszystkim nie tłumaczy skuteczności matematyki i czyni ją intelektualną zabawą i raczej nieużyteczną czynnością[40].

Hilbert mocno wierzył w skuteczność matematyki i w sensowność jej uprawiania. Jeśli uznawałby, że matematykę można sprowadzić do gry na symbolach, niezrozumiała stawałaby się chęć ugruntowania jej aksjomatów, która towarzyszyła formułowaniu programu finitystycznego. Dlatego, o ile chce się stosować do filozofii Hilberta określenie „formalizm" — to tylko w drugim, słabszym znaczeniu. Owa druga, słabsza wersja formalizmu znana jest też pod nazwą „deduktywizmu". Deduktywista uważa, że można tak wyznaczyć znaczenie ciągu symboli, że «reguły gry», czyli operowania nimi, staną się prawdziwe — w tym sensie, że za ich pomocą można dobrze opisywać rzeczywistość. Metodę stosowaną przez Hilberta można zatem raczej nazwać „teoretyczno–

[40]Hilbert mówił często, że jego symbole są pozbawione znaczenia – i stąd może wspomniane nieporozumienia. Pisał np.: *w szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt jest bezpośrednio jasny i niepodważalny.* Z drugiej strony wydaje się, że Hilbert przyznawał zdaniom matematycznym pewną treść. Solidaryzując się z Kantem, pisał: *Już Kant uczył, że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i dlatego nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę.* (Por. Murawski [2002], s. 125 i nn.)

modelową". Matematyk dostarcza różnych, niesprzecznych systemów aksjomatycznych, a sprawdzenie, które z nich mogą prawdziwie (czy raczej — skutecznie) opisywać świat, należy już do fizyków.

Rozpatrzmy przykład z historii geometrii. Gdy w XIX wieku powstały geometrie nieeuklidesowe (przez zastąpienie piątego, niezależnego postulatu Euklidesa przez postulaty alternatywne), nikt nie przypuszczał, że nowe geometrie mają coś wspólnego z realnie istniejącym światem. Tymczasem już w początkach XX wieku okazało się, że geometria opisująca Wszechświat jest odmianą geometrii nieeuklidesowej. Można z tego wyciągnąć wniosek, że budowanie alternatywnych, niesprzecznych systemów nie jest pozbawione sensu. Każda niesprzeczna teoria matematyczna może okazać się dobrym narzędziem do opisu świata. Na dodatek, istnienie w fizycznym świecie modelu dla teorii matematycznej uznać można za pośredni dowód jej niesprzeczności[41].

Przytoczmy teraz poglądy Gödla:

> *obok intuicji istnieje inne (choć tylko prawdopodobne) kryterium prawdziwości aksjomatów matematycznych – ich owocność w matematyce i, można powiedzieć, także w fizyce*[42]*. Decyzja dotycząca prawdziwości* [aksjomatów] *jest także możliwa w inny sposób, a mianowicie przez indukcyjną analizę ich „sukcesu". Sukces oznacza tutaj owocność w sensie konsekwencji, w szczególności weryfikowalnych konsekwencji badanych aksjomatów.* [...] *Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na dyscyplinę i dostarczające tak dobrych metod rozwiązywania problemów, że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane*

[41] Rozważając problem, czy istnieje nieskończoność aktualna mówi na przykład Hilbert: *tutaj musimy zbadać rozciągłość wszechświata, aby zbadać, czy istnieją w nim nieskończenie duże.* (Hilbert [1996], s. 291)

[42] Gödel [2002], s. 121.

> *przynajmniej w takim stopniu, jak dobrze ugruntowana teoria fizyczna*[43].

Jak widać, Gödel również dopuszczał pragmatyczne kryterium uznawania twierdzeń matematycznych. I choć intuicja matematyczna jest dla niego bez wątpienia podstawowym narzędziem poznawczym, to skuteczność zbudowanego systemu stanowi dobre, choć zawodne kryterium jego uzasadniania. Nie trzeba dodawać, że kryterium pragmatyczne jest do przyjęcia niezależnie od przekonań filozoficznych. Najlepszym na to dowodem jest fakt, że dwaj matematycy o tak różnych poglądach filozoficznych, jak Hilbert i Gödel, uznali je za doniosłe.

[43] Gödel [2002], s. 113.

Literatura cytowana

Czeżowski, Tadeusz [1965] *Filozofia na rozdrożu*, PWN, Warszawa 1965

Dadaczyński, Jerzy [2002] *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Biblos, Tarnów

Dąmbska, Izydora [1978]*Idee Kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, w: Archiwum historii i myśli społecznej (24), ss. 167–213

Gödel, Kurt [1931] „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Matematica und verwandter Systeme I", w: Davis, Martin (wyd.) *The undecidable*, Ravin Press, New York 1965, ss. 5–37 (tłumaczenie angielskie)

Gödel, Kurt [1944] „Russell's mathematical logic", w: *Collected works*, vol. II. Oxford 1990, ss. 119–153

Gödel, Kurt [1995] „The present situation in fundations of mathematics", w: *Collected works*, vol. III, Oxford 1995, s. 47

Gödel, Kurt [2003] „What is Cantor's Continuum Problem?", tł. polskie w: Murawski [2003], ss. 103 – 123.

Hilbert, David [1996] „Über das Unendliche", przekład polski w: Murawski Stefan, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów historycznych*, PWN, Warszawa, ss. 288–307

Hilbert, David [1901] *Mathematical Problems*, przekład angielski wykładu z 1900 roku (wydanego w roku 1901) na stronie: `<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>`

Hilbert, David; Bernays, Paul [1934] *Grundlagen der Matematik*, Springer Verlag, Berlin

Hintikka, Jaakko [1998] „Hilbert vindicated?”, w: *Language, truth and logic in mathematics, Collected Works*, Kluwer Academic Publishers, ss. 84–105.

Hintikka, Jaakko [1991] „Kant's New Method of Though and his Theory of Mathematics”, w: *The Knowledge and the Known*, Kluwer Academic Publishers, ss. 126–134

Kant, Immanuel [2001] *Krytyka czystego rozumu*, przeł. R. Ingarden, Antyk, Kęty

Krajewski, Stanisław [2003] *Twierdzenie Gödla i jego implikacje filozoficzne*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa

Maddy, Penelope [1990] *Realism in mathematics*, Oxford

Maddy, Penelope [1997] *Naturalism in mathematics*, Oxford

Minois, Georges [1995] *Kościół i nauka*, Warszawa

Marciszewski, Witold (red.) [1987] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, PWN, Warszawa

Murawski, Roman [1994] „Hilbert's Programm: Incompleteness Theorem vs Partial Realizations”, w: Woleński [1994], ss. 103–127

Murawski, Roman [2000] *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, Wydawnictwo UAM, Poznań

Murawski, Roman [2001] *Filozofia matematyki, zarys dziejów*, PWN, Warszawa

Murawski, Stefan (red.) [2002] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, PWN, Warszawa

Nagel, Ernst; Newman, James R. [1996] *Gödel's Proof*, New York University Press,

Podsiad, Antoni [2001] *Słownik terminów i pojęć filozoficznych*, PAX, Warszawa

Simpson, Stephen [2002] „Partial Realizations of a Hilbert's Programm", przekład polski: „Częściowe realizacje programu Hilberta", w: Murawski [2002], ss. 189–213

Tarski, Alfred [1995] „Prawda i dowód", w: *Pisma logiczno–filozoficzne*, t. I, PWN, Warszawa, ss. 292–332

Woleński, Jan (red.) [1994] *Philosophical Logic in Poland*, Kluwer Academic Publishers

Wójtowicz, Krzysztof [2002] *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Biblos, Tarnów

Wójtowicz, Krzysztof [2001] „O tzw. programie Gödla", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, XXVII/XXIX, ss. 100–117

Wójtowicz, Krzysztof [2002] „Reverse Mathematics and the Indispensability Argument", w: M. Tałasiewicz (red.) *Logic, Methodology nad Philosophy of Science at Warsaw University*, Semper, Warszawa 2002