Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Robert Piechowicz

# Dlaczego twierdzenia Gödla inspirują filozofów?

Tak zwane twierdzenia Gödla należą chyba do najczęściej komentowanych wyników (meta)matematycznych. Niestety liczba poświęconych im publikacji jest odwrotnie proporcjonalna do jakości zawartych w nich rozważań. Aby więc nie powiększać ilości inspirowanych twierdzeniami Gödla spekulacji o wysokim stopniu dowolności w niniejszej pracy przedyskutuję, jakie cechy tych twierdzeń decydują o ich atrakcyjności dla filozofii. Jako punkt wyjścia przyjmuję następującą listę takich cech podaną przez Krajewskiego:

1. kontekst filozoficzny w którym się pojawiły,
2. ogólność,
3. paradoksalność[1].

Część pierwsza i druga niniejszej pracy będą miały charakter historyczny; zrekonstruuję w nich wspomniany kontekst filozoficzny twierdzeń Gödla, gdyż charakterystyka pozostałych cech wymaga jego znajomości. W części trzeciej przedyskutuję wymienione cechy, zaś całość niniejszej pracy zakończę krótkim podsumowaniem.

---

[1] S. Krajewski, *Czy twierdzenia Gödla mają zastosowanie filozoficzne?*, [w:] J. Perzanowski, A. Pietrszuczak, *Byt, Logos, Matematyka*, Wydawnictwo UMK, Toruń 1995, s. 399.

## Pytanie o jedność matematyki

Głównym problemem matematyki XIX i początku XX stulecia była jej jedność i spójność. Pojawił się on z uwagi na bogactwo i różnorodność rezultatów działalności matematyków, ponieważ nie potrafili oni wskazać, co jest podstawą matematycznego charakteru tych teorii ani zależności pomiędzy nimi. *Gdy na dodatek próby wskazywania dyscyplin unifikujących prowadziły do znacznego powiększenia liczby proponowanych matematyce dróg (algebra) czy też wręcz wyprowadzały ją na bezdroża, gdzie problem spójności ustępował lękowi o zasadność jej istnienia (teoria mnogości), sprawa uporządkowania matematyki stawała się dla wielu jej twórców kwestią pierwszoplanową*[2]. Innymi słowy, matematyka wymagała unifikacji oraz systematyzacji, to znaczy uporządkowania poszczególnych teorii i wskazania zależności pomiędzy nimi[3]. Dwie główne propozycje to sformułowany przez F. Kleina program erlangeński oraz program Hilberta[4].

Klein wskazywał, że należy badać obiekty matematyczne a nie teorie. To, że w matematyce występuje wiele różnorodnych teorii, jest konsekwencją aspektowości poznania matematycznego; jedynie *pojęcia matematyki mają [. . . ] swój (niezawisły) byt podglądany przez nas za pomocą naszych (różnych) matematycznych teorii*[5]. Według Kleina podobieństwo teorii jest oparte na odniesieniu do tych samych obiektów. Jednak z różnych względów matematycy wybrali drugą propozycję, w myśl której należy skoncentrować się na teoriach, nie zaś na obiektach. Istotą teorii matematycznej jest nie to, o czym ona mówi, lecz sposób w jaki jest skonstruowana.

---

[2] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994, s. 245.

[3] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów 2000, s. 22.

[4] Program ten stworzył M. Pasch; Hilbert rozwiną go i przede wszystkim upowszechnił. W niniejszej pracy używam pojęcia „program Hilberta” zamiast „program Pascha”, gdyż nie jest moim celem reformowanie zastanego kanonu terminologicznego.

[5] M. Kordos, *op. cit*, s. 246.

Zalecany przez Pascha syntaktyczny rygoryzm stał się kryterium unifikacji matematyki i ułatwił — prowadzoną już — jej systematyzację.

Rezultatem działalności matematyków było nie tylko wskazanie odpowiednich zależności pomiędzy teoriami, ale również wyodrębnienie arytmetyki liczb naturalnych jako teorii podstawowej. Wraz z tym pojawiła się kontrowersja co do tego, czy podstawy matematyki to właśnie arytmetyka, czy też istnieje dyscyplina bardziej fundamentalna.

## Problem podstaw

Zagadnienie istnienia i charakteru podstaw matematyki związane jest z pytaniem o *ignorabimus* w tej dziedzinie. Skoro bowiem matematycy nie wiedzieliby, jak ich dyscyplina jest ufundowana, to działalność matematyczną można by uznać — na przykład — za przejaw jakiegoś zbiorowego szaleństwa czy też zrozumiałą tylko dla nielicznych, działalność magiczną. Nieznajomość pewnego szczegółowego twierdzenia czy problem ze znalezieniem dowodu nie jest tak zasadniczym mankamentem, jak brak wiedzy dotyczącej najbardziej podstawowych struktur. Zaproponowano dwa rozwiązania tego problemu. Z jednej strony, L. Kronecker w swojej słynnej wypowiedzi wskazał, że obiekty arytmetyki są *po prostu*dane; rozważania dotyczące ich natury nie będą miały matematycznego, lecz — co najwyżej — filozoficzny charakter. Na szczęście nie wszyscy matematycy przejęli się kroneckerowskim *dictum*; podjęto próby wyprowadzenia arytmetyki liczb naturalnych z bardziej podstawowej dyscypliny, mianowicie teorii mnogości.

Jako pierwszy próbę taką podjął G. Frege mniej więcej w tym samym czasie, gdy pojawiła się propozycja Pascha. Frege stwierdził, iż *teorię mnogości trzeba wyprodukować jakoś tam, ale jeśliby się już ją miało, to z niej wyprodukuje się arytmetykę liczb natural-*

*nych*[6]; co więcej *sam Frege nie ma ambicji zajmowania się teorią mnogości i zaczyna od zbudowania w teorii mnogości arytmetyki liczb naturalnych*[7]. Brak dobrze skonstruowanej teorii mnogości miał dla koncepcji Fregego poważne konsekwencje — teoria ta prowadziła do antynomii[8]. Problemy z teorią mnogości zmusiły matematyków do ponownego zrewidowania podstaw swojej dyscypliny i stosowanych w niej metod. W rezultacie pojawiły się trzy odrębne propozycje metodologiczne: intuicjonizm, formalizm i tzw. poprawiony logicyzm[9].

Intuicjoniści wskazywali, że problemy podstaw matematyki są konsekwencją niefrasobliwości jej twórców; dlatego należy wprowadzić ograniczenia metodologiczne. Według intuicjonistów matematyka musi być oparta na pierwotnej intuicji liczb naturalnych i zasadzie indukcji; a zatem rozwiązując problem podstaw matematyki poszli oni w ślady Kroneckera. Z kolei w odniesieniu do procedur dowodowych dopuszczali dowody istnienia, o ile mają one charakter konstrukcyjny[10]. *Oszczędność metodologiczna intuicjonistów chroniła ich skutecznie przed paradoksami [...] niestety chroniła ich także przed ogromną częścią matematyki*[11]; z tego względu stanowisko to nie było dla matematyków zadowalające.

Logicyści — podobnie jak Frege — postulowali, że arytmetyka liczb naturalnych jest wyprowadzalna z teorii mnogości[12]; przedstawienie takiej konstrukcji wymaga skonstruowania systemu, w którym nie dałoby się odtworzyć – nie tylko aktualnie zna-

---

[6]M. Kordos, *op. cit*, s. 280. Teoria mnogości o której pisze Kordos to — ściśle rzecz biorąc — fragment logiki drugiego rzędu.

[7]*Ibid.*

[8]Była to tak zwana antynomia Russella.

[9]Logicyzm poprawiony to logicyzm w wersji Russella i Whiteheada.

[10]J. Dadaczyński, *op. cit*, s. 354.

[11]M. Kordos, *op. cit*, s. 282.

[12]Nazwa kierunku sugeruje, iż matematyka miała być wyprowadzalna z logiki. Realizacja tego przedsięwzięcia wykroczyła poza wcześniejsze deklaracje, *realizując idee logicyzmu, zredukowano matematykę nie do logiki, lecz do (przynajmniej pewnego fragmentu) teorii mnogości.* Zob. J. Dadaczyński, *op. cit*, s. 231.

nych ale jakichkolwiek – antynomii. Ambicje logicystów znalazły wyraz w monumentalnych *Principia mathematica* Russella i Whiteheada. Aby właściwie ocenić doniosłość tej pracy przypomnijmy sobie, że twierdzenie o niezupełności podane przez Gödla dotyczy między innymi systemu tam zawartego[13].

Formalizm z kolei był przede wszystkim dokładniejszą realizacją koncepcji Pascha; a zatem, według przedstawicieli tego kierunku, teorie w matematyce są określone jedynie syntaktycznie. Postulat ten miał umożliwić zachowanie całej dotychczasowej matematyki oraz uniknięcie wyprowadzania jej z teorii mnogości; formalizm był więc alternatywą tak dla intuicjonizmu, jak i dla logicyzmu. Podstawową dyscypliną matematyki jest zatem arytmetyka liczb naturalnych, a jako główny problem podstaw matematyki formaliści wskazali niesprzeczność i zupełność. Cała dotychczasowa matematyka byłaby zatem niesprzeczna i zupełna, o ile cechy te posiadałaby arytmetyka. Obie sugestie i próby ich dowiedzenia zostały podważone przez twierdzenia Gödla.

## Kontekst, ogólność i paradoksalność

Twierdzenia Gödla rozwiały filozoficzne oraz metodologiczne pretensje logicyzmu i formalizmu; mimo to sądzę, że — wbrew sugestiom Krajewskiego — kontekst filozoficzny tych twierdzeń to nie tylko wspomniane kierunki badania podstaw matematyki[14]. Zarówno program Hilberta, jak i logicyzm należały do pewnego — zainicjowanego w XIX stuleciu — nurtu badań metamatematycznych, który miał na celu uporządkowanie matematyki i wyodrębnienie dyscypliny podstawowej. Twierdzenia Gödla są jego końcowym rezultatem.

Oba twierdzenia nie dotyczą jakiejś konkretnej teorii formalnej — z tego względu są one ogólne. Ich założenia wymagają, by układ

[13]Tytuł pracy Gödla, w której znajduje się to twierdzenie wraz z dowodem, brzmi *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia mathematica" und verwandter Systeme.*

[14]Por. S. Krajewski, *op. cit*, s. 399.

aksjomatów teorii, do której można je zastosować pozwalał na rekonstrukcję arytmetyki liczb naturalnych. Z formalnego punktu widzenia nie jest to wymóg zbyt silny; ma on jednak istotne konsekwencje — teoria taka jest niezupełna, a jej niesprzeczności nie da się dowieść bez wykorzystania konstrukcji spoza tej teorii. A zatem twierdzenia Gödla mówią *coś, i to coś bardzo podstawowego, o całej teorii, całym systemie*[15].

Wynik Gödla jest paradoksalny tak ze względu na swoją konstrukcję, jak i z uwagi na konsekwencje dla filozofii matematyki. Jednakże pierwszy przypadek jest interesujący jedynie dla kogoś, kto zna lub chce poznać te twierdzenia od strony formalnej; problematyka ta jest w rozważaniach filozoficznych prawie nieobecna – większość inspiracji Gödlowskich to analizy i próby ekstrapolacji konsekwencji filozoficznych.

Filozoficzna paradoksalność twierdzeń Gödla związana jest z wyróżnionym miejscem matematyki w dziejach ludzkiej myśli; wyjątkowość tej dziedziny nie uległa zmianie mimo pojawiających się podczas jej rozwoju problemów, ani mimo zwiększającej się abstrakcyjności. Dopiero wynik Gödla wskazał na potrzebę zrewidowania rozmaitych filozoficznych deklaracji. Jego dokonanie wskazuje bowiem na niemożliwość usunięcia z matematyki takich pojęć, jak sens czy intuicja; innymi słowy *aby cokolwiek mogło być sformalizowane, coś innego musi pozostać niesformalizowane*[16]. Matematycy – w odróżnieniu od filozofów — zazwyczaj byli i są tego świadomi. Zapewne dlatego obecne w niektórych filozoficznych komentarzach pesymistyczne wnioski są im obce[17]. Twórcza aktywność matematyków świadczy o tym, że są oni przekonani o sensowności uprawiania swojej dziedziny.

---

[15] *Ibid.*

[16] J. Woleński, Metamatematyka a epistemologia, PWN, Warszawa 1993, s. 32.

[17] Warto zwrócić uwagę na wypowiedzi samego Gödla. Zob. K. Wójtowicz, Platonizm matematyczny, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2002 oraz A. Brożek, Russell i Gödel — filozofowie, paradoksy i broda Platona, „Semina Scientiarum", 2 (2003), ss. 30 – 45.

## Zakończenie

Dotychczasowa argumentacja miała wskazać, jakie cechy posiadają twierdzenia Gödla. Czy są to jednak cechy decydujące o filozoficznej atrakcyjności tychże twierdzeń? Pozytywną odpowiedź na to pytanie uzasadnię nie wprost. Zauważmy bowiem, iż twierdzenia nie posiadające którejś z wymienionych cech nie spotkały się z podobnym zainteresowaniem; na przykład:

a) twierdzenie Lindenbauma (o nadystemach zupełnych) jest ogólne i paradoksalne, ale pozbawione odpowiedniego kontekstu;

b) lemat Craiga jest z kolei ogólny i ma pewien kontekst, ale pozbawiony jest paradoksalności;

c) twierdzenie Banacha–Tarskiego (o paradoksalnym rozkładzie kuli) posiada odpowiedni kontekst, jest paradoksalne, ale ma charakter szczegółowy;

d) twierdzenie o antypodach — jest ono paradoksalne, nie ma zaś kontekstu i jest szczegółowe.

Oczywiście w oparciu o podane kontrprzykłady nie można rozstrzygnąć tego, czy lista rozważanych w niniejszym artykule cech jest pełna; wskazują one natomiast na to, że wymienione cechy stanowią istotną charakterystykę twierdzeń Gödla.