Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Paweł Rojek

Antynomia Russella i twierdzenie Gödla jako logika absolutnego[1]

1. List Russella do Fregego z 1902 roku i wystąpienie Kurta Gödla na konferencji w Królewcu w roku 1930 stanowią kamienie milowe rozwoju dwudziestowiecznej logiki i matematyki. Oba wydarzenia łączy szereg podobieństw. Zarówno Russell jak i Gödel byli bardzo młodzi (Russell pisząc do Fregego był trzydziestolatkiem, Gödel miał 24 lata), i obaj dokonali rewolucyjnego zwrotu w dziejach matematyki: Russell zakończył beztroski okres tzw. „naiwnej teorii mnogości" Cantora, a Gödel – równie naiwny, jak się okazało, program Hilberta. Antynomia Russella i tzw. pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki mają jednak nie tylko podobieństwa historyczne. Wspólna im jest pewna struktura łącząca je z tradycyjnym w filozofii problemem absolutności. Tę osobliwą strukturę (dzieloną także np. z twierdzeniem Tarskiego z 1933 o niedefiniowalności prawdy) łatwo można wydobyć, stosując opracowane niedawno przez W. I. Moisiejewa środki formalne.

Najpierw, z pomocą dobrze znanej antynomii Russella, szczegółowo omówione zostaną cechy tej struktury, które następnie zilustrowane zostaną na przykładzie twierdzenia Gödla. Wreszcie pokazane zostaną związki obu twierdzeń z logiką absolutnego.

[1]Przygotowanie tej pracy umożliwiły mi studia w semestrze wiosennym roku akademickiego 2002/2003 w Państwowym Uniwersytecie w Woronežu (Rosja). Nieocenioną pomoc okazał mi prof. Wiaczesław I. Moisiejew, któremu pragnę złożyć tą drogą podziękowania.

2. Teoria *L-sprzeczności* W. I. Moisiejewa jest jedną z prób zbliżenia dwu linii rozwojowych filozofii: „formalnej" tradycji Parmenidesa, osadzonej na zachowaniu prawa tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka, i „dialektycznej" linii Heraklita, odrzucającej te zasady. Chodzi o znalezienie kryterium logicznej demarkacji, które pozwoliłoby odróżnić sprzeczności „dialektyczne" (nieusuwalne bez straty dla poznawczych możliwości systemu) od sprzeczności–pomyłek. Teoria ta jest ścisłą eksplikacją pewnych intuicji filozoficznych, podzielanych w kręgu tzw. „rosyjskiej filozofii wszechjedności", biorącej początek od Wł. Sołowjowa. O. Paweł Florenski, na początku XX wieku, w pracy [8] jako pierwszy próbował zastosować współczesną logikę dla wyjaśnienia tych intuicji. Praca ta została współcześnie podjęta przez W. I. Moisiejewa i doprowadziła do skonstruowania formalnych narzędzi, u źródeł których leżą analogie między logiką i topologią, w szczególności możliwość wprowadzenia w logice pojęcia granicy (patrz [5], [6] i najnowsza praca [7]).

I. Antynomia Russella

3. Dobrze znana filozofom antynomia Russella generowana jest przez określenie własności tworzącej tzw. zbiór Russella, czyli zbiór tych zbiorów, które nie są własnymi elementami:

$$R = \{x : x \notin x\}. \tag{1}$$

Jeśli zbiór R jest swoim elementem to, biorąc pod uwagę zadającą go własność, nie jest swoim elementem. Jeśli natomiast R nie jest swoim elementem, to właśnie dlatego jest swoim elementem. Antynomia Russella przybiera postać:

$$R \in R \equiv R \notin R. \tag{2}$$

A zatem, po pewnych przekształceniach:

$$R \in R \wedge R \notin R. \tag{3}$$

4. Istnieje prosty i naturalny sposób ominięcia tej antynomii, wykorzystany w aksjomatycznych teoriach mnogości (aksjomat wyróżniania). Gdyby dziedziną określenia zbioru R był jakiś ograniczony zbiór X, obok którego mogłyby istnieć jakieś inne zbiory, to sprzeczność mogłaby być usunięta przez przypuszczenie, że zbiór R po prostu nie należy do X. Zbiór R byłby wówczas zrelatywizowany do pewnej dziedziny, na której określona jest zadająca go własność:

$$R_x = \{x : x \in X \wedge x \notin x\}. \tag{4}$$

Założenie, że $R_x \in X$ prowadzi do sprzeczności, więc można przyjąć, że $R_x \notin X$, co usuwa problem. *Zbiór Russella* – pisze Moisiejew – *to szczególny typ obiektu–rozszerzyciela. Określenie go na zbiorze X prowadzi do budowy obiektu, wychodzącego za ramy X. I póki X jest lokalny, można wyjść za jego ramy, a zastosowanie do niego predykatu tworzącego zbiór R nie prowadzi do sprzeczności. Ale gdy tylko jako X zaczyna występować obiekt, za którego ramy nie sposób już wyjść, zbiór R staje się sprzeczny – wychodzi za ramy tego, za czego ramy wyjść już się nie da. Oto istota sprzeczności Russella* ([6], s. 267).

5. Moisiejew nazywa zbiór Russella i podobne obiekty *L-obiektami*. Są to obiekty, które:

(i) zakładają wydzielenie dwu planów, w których jeden („przedmiotowy") zawiera się w drugim („metaplanie"). W przypadku antynomii Russella jest to zbiór X i pewien szerszy zbiór, do którego należy zarówno R_x i X;

(ii) charakteryzują się swoistym „dążeniem" do wyjścia poza plan pierwszy i wymagają (pod groźbą sprzeczności) uznania je za należące do „metaplanu";

(iii) jednocześnie można je odtwarzać dla dowolnej dziedziny, w tym także dla zbioru otrzymanego przez rozszerzenie pierwszego planu.

Podsumowując: *L-obiekty zadawane są dwoma wzajemnie wykluczającymi się warunkami: określeniem siebie poza planem „przedmiotowym” i warunkiem rozszerzenia przedmiotowego planu na „metaplan”*([6], s. 268).

Jednym z pierwszych *L-obiektów*, opisanych w literaturze filozoficznej, jest platońska idea, prowadząca do tzw. problemu trzeciego człowieka. Platoński *Parmenides* jest zresztą w ogóle paradygmatycznym przykładem analizy problemów absolutnego.

6. Wobec tej naturalnej możliwości usunięcia (czy raczej – jak się okaże –„przesunięcia”) antynomii, predykat tworzący zbiór Russella można zadać na dziedzinie uniwersum U, w którym można wydzielić nieskończony ciąg zbiorów U_0, U_1, $U_2, \ldots$, takich, że $U_i \subseteq U_{i+1}$ i $U_i \neq U_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Jest to procedura analogiczna w pewnym sensie z podziałem na typy logiczne, proponowanym przez Russella. Niech zbiór R^1 jest zadawany przez własność „x nie należy do x i x należy do U_0”:

$$R^1 = \{x : x \in U_0 \wedge x \notin x\}. \tag{5}$$

Zbiór taki nie prowadzi do sprzeczności, wyprowadza jednak poza U_0 do zbioru, do którego należy zarówno R^1 jak i U_0 (aby uniknąć sprzeczności trzeba założyć, że R^1 nie należy do U_0). Niech takim zbiorem będzie U_1. Dla U_1 można jednak utworzyć nowy zbiór Russella R^2, zadawany przez własność:

$$R^2 = \{x : x \in U_1 \wedge x \notin x\}. \tag{6}$$

R^1 spełnia predykat zadany przez własność zbioru R^2 (ponieważ R^1 i U_0 należą do R^2), zatem:

$$R^1 \in R^2 \wedge R^1 \notin R^1, \tag{7}$$

(por. z formułą (3)). R^1 nie może jednak należeć do U_1, ponieważ prowadziłoby to do sprzeczności. Wobec tego wyprowadza on do kolejnego zbioru U_2, który zawiera R^1 i U_1, itd.

Jest jasne, że procedura ta może być powtarzana bez końca. Dla uniwersum U_n zbiór R^{n+1} określa się predykatem „$x \notin x \wedge x \in U_n$". Tworzy się nieskończony szereg narastających uniwersów U_0, U_1, U_2, ..., gdzie $U_i \subseteq U_{i+1}$ i $U_i \neq U_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ oraz zbiorów $R^1, R^2, \ldots$, gdzie $R^i \in R^{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. W ogólnym przypadku formuła (7) przybiera postać:

$$R^n \notin R^n \wedge R^n \in R^{n+1}, \tag{8}$$

która jest prawdziwa dla dowolnych $n = 1, 2, \ldots$.

Korzystając z procedury proponowanej przez Moisiejewa (sformułowanej w [1] i omówionej w [5] i [6]), można budować ciągi składające się z formuł języków pewnych teorii. Nad formalną teorią T można skonstruować – jako jej rozszerzenie – *L-sprzeczną* teorię T^*, która jest definiowana jako zbiór ciągów z granicami formuł z teorii T w języku $L(T)$. Posiadający granicę ciąg formuł teorii T typu $\{A_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ nazywa się tezą teorii T^* jeśli istnieje pewne $m \geqslant 0$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant m$ formuła A_n języka $L(T)$ jest tezą teorii T. Teza teorii T^* (czyli ciąg formuł z granicą) nazywa się *L-sprzecznością* jeśli jej granica równa się $A \wedge \neg A$, gdzie A jest formułą języka $L(T)$. W pracy [1] podane są dowody niesprzeczności i pełności T^*, o ile niesprzeczna i pełna jest teoria T. Ciąg zbudowany na tej zasadzie z formuły (8) przedstawia się następująco:

$$\{R^n \notin R^n \wedge R^n \in R^{n+1}\}_{n=0}^{n=\infty}. \tag{9}$$

Każdy element tego ciągu składa się z koniunkcji dwóch prawdziwych sądów, z których jeden jest „słabą" negacją drugiego (tzn. różni się od drugiego elementu koniunkcji „przesunięciem" indeksu, patrz [6], s. 332) i sam jest zdaniem prawdziwym. Ciąg ten ma granicę, przy której dochodzi do sprzeczności: $R^\infty \in R^\infty \wedge R^\infty \notin R^\infty$. Takie granicznie sprzeczne formuły, dedukowalne ze specjalnych rozszerzeń formalnych teorii, Moisiejew nazywa *L-sprzecznościami.* Logika *L-sprzeczności* nie jest sprzeczna z tradycyjną logiką, stanowi tylko jej rozszerzenie i dopełnienie o ciągi formuł z granicami, podobnie jak zbiór liczb wymiernych może być poszerzony o liczby niewymierne do zbioru liczb rzeczywistych. Sprzeczność zostaje „zneutralizowana" w formie ciągów formuł i pojawia się dopiero w ich granicach.

Otrzymanie *L-sprzeczności* jest świadectwem obecności nietrywialnych sprzeczności, mających „dialektyczny" charakter. Jak zostanie pokazane w punkcie 9, otrzymanie jej w przypadku zbioru Russella związane jest z tym, że struktura antynomii Russella jest izomorficzna ze strukturą wielu filozoficznych antynomii, nie wyłączając Kantowskich.

II. Twierdzenie Gödla

7. Ta sama struktura obecna jest w przypadku twierdzenia Gödla. Niech teoria T^0 jest niesprzecznym, rekursywno–akjomatyzowalnym rozszerzeniem formalnej arytmetyki liczb naturalnych. W tym wypadku – zgodnie z twierdzeniem Gödla o niezupełności – dla tej teorii istnieje niedowodliwe prawdziwe Gödlowskie zdanie G^0, głoszące swoją niedowodliwość w T^0. Teorię T^0 można rozszerzyć przez dołączenie do jej aksjomatów zdania G^0 i otrzymaną nową teorię oznaczyć T^1. Wówczas:

$$T^0 \nvdash G^0 \wedge T^1 \vdash G^0. \tag{10}$$

Teoria zawierająca arytmetykę jest jednak *zasadniczo* niezupełna. *Gdybyśmy bowiem powiększyli pierwotny zbiór aksjomatów o formułę G* [w tym przypadku chodzi o G^0 – P.R.], *to w systemie opartym na tej wzbogaconej aksjomatyce można by zbudować inną prawdziwą, lecz nierozstrzygalną formułę arytmetyczną; konstrukcja takiej formuły polegałaby po prostu na powtórzeniu w nowym systemie procedury zastosowanej w systemie pierwotnym w celu zbudowania formuły prawdziwej lecz nierozstrzygalnej. Ewentualne dalsze wzbogacenie systemu wyjściowego nie zmieni sytuacji; prawdy nierozstrzygalne zawsze będzie można sformułować* ([4], s. 66). Teoria T^1 także jest niesprzecznym rozszerzeniem arytmetyki, wobec czego istnieje zdanie Gödlowskie G^1 takie, że nie jest ono dowodliwe w T^1. G^1 także można dołączyć do T^1 otrzymując T^2, *notabene* niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki. Procedurę tę można powtarzać w ten sam sposób, jak miało to miejsce z „poszerzającym się" uniwersum w przypadku zbioru Russella (wyobrażenie o rozszerzającym się uniwersum ma czysto heurystyczny charakter). Dla dowolnych $n = 0, 1, 2, \ldots$ (10) przybiera ogólną postać:

$$T^n \nvdash G^n \wedge T^{n+1} \vdash G^n. \tag{11}$$

Postępując w ten sposób otrzymuje się nieskończony ciąg teorii $T^0, T^1, T^2, \ldots$, gdzie $T^i \subseteq T^{i+1}$ i $T^i \neq T^{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, a teoria T^{k+1} jest otrzymana z T^k przez dodanie do niej zdania G^k jako nowego aksjomatu oraz nieskończony ciąg Gödlowskich formuł $G^0, G^1, G^2, \ldots$. Postępując analogicznie jak w punkcie 6, można zbudować następujący ciąg formuł:

$$\{T^n \nvdash G^n \wedge T^{n+1} \vdash G^n\}_{n=0}^{n=\infty}. \tag{12}$$

W swojej granicy ciąg ten osiąga sprzeczną formułę $T^\infty \nvdash G^\infty \wedge T^\infty \vdash G^\infty$, co świadczy o jego *L-sprzecznym* charakterze.

Inną, bardziej złożoną procedurę, operującą pojęciem n–rekursywności, proponuje dla wyrażenia *L-sprzecznego* charakteru twierdzenia Gödla W. Moisiejew (por. [6] i [7]).

8. W twierdzeniu Gödla rolę *L-obiektu* spełnia zdanie Gödlowskie G. Zdanie to, podobnie jak zbiór R,

(i) skłania do oddzielenia dwu planów: bieżącej teorii T^n w której się pojawiło i teorii T^{n+1}, która powstaje po przyłączeniu go do aksjomatów;

(ii) „wyprowadza" poza posiadaną teorię, domagając się włączenia w skład aksjomatów. Nie ma tego problemu – analogicznie jak w przypadku antynomii Russella – jeśli zgodzić się na sprzeczność;

(iii) odtwarza się dla każdej takiej teorii (por. punkt 5).

Analogia z antynomią Russella wymaga jeszcze wskazania na sprzeczność, do której prowadzi „naiwne" podejście do twierdzenia Gödla w matematyce. Historycznie takie „naiwne" podejście nie zaistniało, ale jest możliwe do pomyślenia w analogii do antynomii Russella. Sprzeczność pojawia się wraz z naturalną skłonnością, aby zdanie G^0 wywieść z aksjomatów teorii T^0: *w ramach naiwnego podejścia zdanie Gödlowskie powinno być włączone w skład twierdzeń teorii* ([6], s. 337). Gdyby G^0 było udowodnione w T^0, to teoria T^0 byłaby sprzeczna (ponieważ wówczas – jak pokazał Gödel – dałoby się udowodnić i $(\neg G^0)$, analogicznie jak rzecz ma się ze zbiorem Russella w naiwnej teorii mnogości. Jest to ta sama struktura, która „wypycha" G, podobnie jak zbiór R, z granic „pierwszego planu" teorii. Ale usunięcie G^0 spośród twierdzeń T^0 dla ratowania jej niesprzeczności jest już świadectwem nie–naiwnego podejścia. A więc – powiada Moisiejew – *zdanie Gödlowskie gra w teorii elementarnej matematyki tą samą rolę co zbiór Russella w teorii mnogości* ([6], s. 338).

III. Logika absolutnego

9. Istnieje niezaprzeczalne podobieństwo – wskazane przez A. Churcha – między próbą usunięcia antynomii Russella w teorii typów a stworzeniem hierarchii języków przez Tarskiego, ponieważ *przypuszczalnie nie robi to większej różnicy, czy ma się hierarchię wyrażeń w jednym języku czy hierarchię różnych języków* ([3], s. 661). Podobieństwo to obejmuje także problemy związane z twierdzeniem Gödla. Wewnętrzna struktura antynomii Russella, twierdzenia Gödla i twierdzenia Tarskiego odtwarza szczególną logikę filozoficznych antynomii związanych z pojęciem absolutnego. Ich ogólna struktura jest wspólna dla wielu antynomii filozoficznych. W szczególności *zbiór Russella przy pewnych dodatkowych umowach w pełni wyraża budowę wielu antynomicznych obiektów należących do dialektycznej tradycji w filozofii* ([6], s. 265). Tą dodatkową umową jest ograniczenie dziedziny rozważań do uniwersów, w których występują tylko zbiory niezwrotne, czyli te, które nie są własnymi elementami. Zbiór R staje się wtedy analogonem „totalnych pojęć" takich, jak świat, przestrzeń, czas, świadomość itp. W ten sposób odtworzyć można strukturę pierwszej antynomii Kanta z *Krytyki czystego rozumu*, która jest izomorficzna do takiej wersji antynomii Russella, gdzie odpowiednikiem „$x \in R$" jest „x jest ograniczone". Podobnie można odnieść się np. do sławnego paradoksu kamienia, problemu zła i dobroci Boga itd.

Omawiana struktura odtwarza się także w przypadku właściwego problemu logiki absolutnego, który bierze się z samego określenia Absolutu jako – z jednej strony – wolnego od tego, co inne, z drugiej zaś strony – jako pełni wszelkiego bytu, włączając także to, co inne. *Paradoks absolutnego może być sformułowany na wiele różnych sposobów, ale w każdym z nich odtwarza się konieczność jednoczesnej podwójnej relacji absolutnego do względnego (warunkowego) bytu – relacji zawierania i utożsamienia absolutnego z tym, co względne, oraz relacji ich wykluczania* ([5], s. 2). Po oddzieleniu Absolutu (rozumianego jako źródło bytu) od bytu, który jest jego ontologiczną projekcją, pojawia się problem warunków, w których ta projekcja została uzyskana. One jednak także mają swe źródło w Absolucie (który jest przecież pełnią bytu). To z kolei generuje problem warunków powstania tych warunków itd. To, co było brane za bezwarunkowe na jednym etapie, okazuje się względne w perspektywie „rozszerzonego" uniwersum. Odtwarza się struktura znana z antynomii Russella i twierdzenia Gödla. Przedstawiona tu metoda pracy z podobnymi problemami może być wykorzystana do modelowania filozoficznych koncepcji Absolutu, co zostało uczynione np. w przypadku rozbudowanej koncepcji Sołowjowa i jego kontynuatorów (w [6]).

Literatura

[**1**] V. I. Moiseev, „About Some Properties of L–incositent Theories”, preprint 2001.

[**2**] V. I. Moiseev, „To basic definitions of Logical Topology”, [w:] *Smirnov's Readings. 4th International Conference*, Moscow: Russian Academy of Sciences 2003, ss. 84–85.

[**3**] U. Nortmann, „Paradoxes”, [w:] H. Burkhardt, B. Smith (eds.), *Handbook of Metaphysics and Ontology*, vol. II, München: Philosophia Verlag 1991, ss. 658–661.

[**4**] E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, przeł. B. Stanosz, Warszawa: PWN 1966.

[**5**] В. И. Моисеев, „Логика абсолютного”, *preprint* 2000.

[**6**] В. И. Моисеев, „Логика всеединства”, Москва: Per Se 2002.

[**7**] В. И. Моисеев, „Математическая логика”, Воронеж: БГУ, 1999.

[**8**] П. Флоренский, „Столп и утверждение истины”, Москва: Изд. АСТ 2003.