Semina ☐ Scientiarum Nr 4 2005

Cezary Karolczak

O pewnych ideach teorii typów obecnych w niektórych teoriach mnogości[1]

Powstała pod koniec XIX wieku teoria mnogości jest współcześnie uważana za elementarną teorię matematyczną. Stanowi ona narzędzie przy badaniu innych, bogatszych teorii w matematyce. Dzięki wprowadzeniu pojęcia zbioru (klasy) i relacji bycia elementem, teoria mnogości stała się jednym z systematycznych rozwiązań, sięgającego starożytności problemu części i całości. Kluczową rolę w rozwoju teorii mnogości odegrało odkrycie na jej gruncie licznych antynomii[2]. Zmusiło ono matematyków do przemyślenia raz jeszcze podstaw matematyki i ściślejszego formułowania teorii. Problem antynomii w teorii mnogości rozwiązano poprzez jej aksjomatyzację. Sens pojęcia zbioru i relacji bycia elementem został określony w odpowiednich aksjomatach. Zabieg ten pozwolił na wyeliminowanie znanych antynomii, choć niejednokrotnie podważano wagę i sensowność niektórych aksjomatów. Słabsza wersja logicyzmu, czyli poglądu filozoficznego, według którego całą matematykę da się sprowadzić do logiki, głosi, że cała matematyka jest sprowadzalna właśnie do jakiejś aksjomatycznej teorii mnogości.

Jednakże aksjomatyzacja teorii mnogości jest tylko jednym z kilku sposobów uporania się z problemem antynomii. Na początku XX wieku Bertrand Russell w napisanym z Alfredem N. Whiteheadem dziele *Principia Mathematica* (1910–1913) przedstawił teorię typów. Teoria ta zakładała, w największym skrócie, że przedmioty rozważane przez teorie matematyczne należą do tzw.

[1] Treść artykułu została wygłoszona podczas obrad sekcji logiki VII Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Szczecinie 16 września 2004 r.

[2] Najbardziej znaną z nich jest antynomia Russella.

typów. Warunki i ograniczenia nałożone na to pojęcie uniemożliwiały powstanie antynomii. Teoria zaproponowana przez Russella miała także swoje wady. Najważniejszą z nich był zakaz istnienia tzw. zbiorów mieszanych, tzn. takich, których elementy są przedmiotami różnych typów, co prowadziło do różnych paradoksów[3]. W drugiej połowie lat trzydziestych XX wieku W.V.O. Quine zaproponował dwa systemy logiczne — kolejną próbę rozwiązania problemu antynomii. Podejście Quine'a miało, w zamierzeniu, łączyć w sobie intuicyjne podejście teorii typów ze ścisłym językiem aksjomatycznej teorii mnogości.

Przyjmuje się[4], że teoria mnogości wyparła teorię typów. Nie docenia się jednak faktu licznych wzajemnych związków pomiędzy tymi dwoma systemami podstaw matematyki. Celem tej pracy jest omówienie relacji między podstawowymi rozwiązaniami teorii typów a ich odpowiednikami w teoriach mnogości. Teoria typów stanowić tu będzie jedynie punkt wyjścia służący prześledzeniu tego, w jaki sposób różne rozstrzygnięcia w teoriach mnogości odwoływały się do teorii typów. W pracy przyjrzę się aksjomatycznej teorii mnogości Zermelo (w szczególności systemowi Zermelo–Fraenkla), systemom NF i ML Quine'a oraz teorii zbiorów nieufundowanych.

Dwie idee teorii typów

W roku 1959 ukazała się biografia filozoficzna Bertranda Russella zatytułowana: *Mój rozwój filozoficzny*. Russell przedstawił w niej swój dorobek intelektualny. Między innymi zarysował główne idee teorii typów.

„**(*) Kiedy stwierdzam wszystkie wartości funkcji fx, wartość jaką x może przybrać, musi być określona, jeżeli to, co stwierdzam, ma być określone. Innymi słowy, musi istnieć jakaś totalność możliwych wartości x.** Jeżeli teraz tworzę nowe wartości określone w terminach tej totalności, to to-

[3] Marciszewski [1988], s. 205, Murawski [2001], s. 94.
[4] Marciszewski [1988], Murawski [2001].

talność ta wydaje się ulegać rozszerzeniu, i w ten sposób nowe wartości, odnoszące się do niej, będą się odnosiły do tej rozszerzonej totalności. Ale, ponieważ muszą się w niej zawierać, nie może ona nigdy ich «dogonić». Proces ten przypomina skakanie na cień własnej głowy. Najprościej można to zilustrować przy pomocy paradoksu kłamcy. Kłamca mówi: „Wszystko, co twierdzę, jest fałszem". Jest to w istocie zdanie, które on stwierdza, lecz odnosi się ono do ogółu jego twierdzeń, i tylko zaliczając je do tego ogółu otrzymujemy paradoks. **(**) Musimy rozróżniać między twierdzeniami, które odnoszą się do jakiejś całości twierdzeń, i twierdzeniami, które się do niej nie odnoszą. Te, które odnoszą się do jakieś całości twierdzeń, nigdy nie mogą być tej całości elementami**. Możemy określić twierdzenia pierwszego stopnia jako te, które nie odnoszą się do żadnej całości twierdzeń; twierdzenia drugiego stopnia jako te, które odnoszą się do całości twierdzeń pierwszego stopnia, i tak dalej, *ad infinitum.* Tak więc nasz kłamca powinien powiedzieć «Wypowiadam teraz fałszywe twierdzenie pierwszego stopnia, które jest fałszywe». Ale wypowiedź ta jest sama w sobie twierdzeniem drugiego stopnia. Nie wypowiada więc ona żadnego twierdzenia pierwszego stopnia. Stąd to, co mówi, jest po prostu fałszem, i dowód, że jest jednocześnie prawdą, upada. Dokładnie ten sam dowód stosuje się do każdego twierdzenia wyższego stopnia.

(**) Okazuje się, że we wszystkich paradoksach logicznych istnieje jakiś rodzaj samozwrotności, który należy zakwestionować na tej samej podstawie, to znaczy, że zakłada, jako element całości, coś odnoszącego się do tej całości, co może mieć określone znaczenie tylko pod warunkiem, że całość została już przedtem ustalona"[5].

W powyższym fragmencie możemy wyróżnić dwie podstawowe idee teorii typów:
1. Gwarancja istnienia wartości argumentów funkcji zdaniowych. (Fragment oznaczony **(*)**).

[5] Russell [1971], ss. 88–89; podkreślenia i oznaczenia (*), (**) moje C. K.

2. Zakaz istnienia funkcji, których argumentami byłyby one same. (Oba fragmenty oznaczone **(**)**).

Gwarancja istnienia wartości argumentów funkcji zdaniowych nie oznacza nic innego, jak to, że dowolna funkcja fx musi mieć zagwarantowaną dziedzinę, klasę, w terminologii Russella — totalność wartości swoich argumentów. Związek między tak sprecyzowaną pierwszą ideą teorii typów, a samym pojęciem typu przedstawiają następujące określenia Russella pochodzące z pracy Russell [1908].

Zakres zmienności (*range of significance*) pewnej funkcji jest definiowany jako kolekcja tych argumentów, dla których funkcja ta jest sensowna, tzn. ma wartość logiczną[6]. Zakres zmienności pewnej funkcji jest sumą wszystkich argumentów, dla których funkcja ta jest prawdziwa oraz wszystkich argumentów, dla których funkcja ta jest fałszywa[7].

Natomiast **typ** jest definiowany jako zakres zmienności pewnej funkcji zdaniowej[8]

Innymi słowy pierwszą ideę teorii typów można sformułować w sposób następujący:

1' Dla każdej funkcji zdaniowej musi istnieć jej typ, albo

1" Każda funkcja zdaniowa musi być sensowna (tzn. dla dowolnego argumentu ze swej dziedziny przyjmować wartość prawdy lub fałszu).

Okazało się jednak, co pokazała choćby antynomia Russella, że nie jesteśmy w stanie w prosty sposób wykazać sensowności dowolnej funkcji zdaniowej. Dlatego Russell nałożył na funkcje zdaniowe dodatkowy warunek, którego sens wyraża druga idea teorii typów. Idea, zgodnie z którą argumentem danej funkcji nie może być ona sama, pochodzi bezpośrednio z zasady, którą Russell nazwał zasadą błędnego koła (*vicious–circle principle*). Głosi ona, że „żadna totalność nie może zawierać elementów zdefiniowanych

[6] Russell [1908], s. 75.
[7] Russell [1908], s. 72.
[8] Russell [1908], s. 75.

w terminach tejże totalności”[9]. Określenie pewnej totalności wymaga uniwersalnej kwantyfikacji. Dlatego też to, co zawiera zmienną związaną musi różnić się typem od możliwych wartości tejże zmiennej[10]. Pod koniec tekstu Russell wypowiada „fundamentalną zasadę doktryny typów”: „Dowolne wyrażenie zawierające pewną zmienną związaną jest wyższego typu niż ta zmienna”[11].

Russell chcąc zaznaczyć, że poszczególne wartości zmiennych są różnych typów, wprowadził odmienne sposoby notacji zmiennych. Zmienne najniższego typu zapisywał małymi literami łacińskimi (oprócz f, g zarezerwowanych dla funkcji), zaś funkcje predykatywne dowolnego argumentu x, gdzie x jest dowolnego typu, oznaczał jako $\phi!x$[12]. Pojęcie funkcji predykatywnej jest istotne dla całej konstrukcji teorii typów.

Funkcja jednej zmiennej jest **funkcją predykatywną**, jeśli należy do typu o jeden stopień wyższego niż jej argumenty. Zdaniem Russella takie ograniczenie nałożone na argumenty w satysfakcjonujący sposób zapobiega powstawaniu antynomii. Choć Russell nie przywiązywał szczególnej wagi do istnienia klas, to fakt odmiennego sposobu notacji dla różnych typów sugeruje następującą równoważność notacyjną:

Dla wszystkich wartości x, fx jest równoważne wyrażeniu: x należy do klasy α.

Konsekwencją przyjęcia zasady błędnego koła było odrzucenie jako bezsensownych następujących formuł $x \in x$, $x \in y$, $\alpha \in \alpha$, $\alpha \in x$, przy zastrzeżeniu, że x, y są zmiennymi jednego typu, zaś α oznacza wartości należące do typu o jeden wyższego niż ten, do którego należą wartości zmiennych x, y. Podstawowym celem wprowadzenia zróżnicowanej notacji zmiennych jest uniknięcie tzw. typikalnej wieloznaczności (*typical ambiguity*). Typikalna

[9] Russell [1908], s. 75. Dodajmy, że dla Wittgensteina przedstawiona tutaj II idea teorii typów stanowi podstawę całej tej teorii (*Traktat* 3.333).

[10] Russell [1908], s. 75.

[11] Russell [1908], s. 102.

[12] W innych kontekstach funkcje oznaczał także pojedynczymi literami $\psi, \chi, \theta, f, g, F, G$.

wieloznaczność powstaje, gdy nie jesteśmy w stanie określić, do jakiego typu należy przedmiot oznaczony przez zmienną. Wykorzystanie odmiennej notacji zmiennych umożliwia podanie zasady abstrakcji, która nie prowadzi do antynomii: $(\exists\alpha)(x)(x \in \alpha \equiv fx)$, podczas gdy nie uwzględnienie tego rozróżnienia prowadzi do antynomii Russella: $(\exists y)(x)(x \in y \equiv fx)$.

Analizując teorię typów, Quine zasugerował[13], że ma ona dwa aspekty: aspekt metafizyczny (ontologiczny) i aspekt formalny (metalogiczny). Aspekt ontologiczny polega na żądaniu, by wszystkie elementy dowolnej klasy były jednakowo zgodne z typem. Natomiast aspekt formalny określa warunki, na mocy których uznaje się za sensowne formuły zbudowane za pomocą symbolu „$\in$" i „$\subseteq$". Wyrażenie zbudowane przy wykorzystaniu dwuargumentowego symbolu „$\in$" jest sensowne, gdy wartość argumentu stojącego po lewej stronie symbolu „$\in$" należy do typu o jeden niższego od typu, do którego należy wartość argumentu stojącego po prawej stronie tego symbolu. Wyrażenia zbudowane za pomocą symbolu „$\subseteq$" są sensowne wówczas, gdy wartości obu argumentów należą do jednego typu.

Chęć zachowania intuicyjnej metody tworzenia klas wyznaczonych przez funkcje zdaniowe oraz ontologiczny charakter samego pojęcia typu sprawiły, że Quine tak przeformułował zasadę abstrakcji, by nie odnosiła się ona do pojęcia typu. Zanim jednak przedstawię rozwiązanie Quine'a, zwrócę uwagę na niektóre elementy systemu teorii mnogości Zermelo–Fraenkla. Dzięki temu uwypuklą się pewne podobieństwa i różnice między omawianymi systemami.

---

[13] Quine [1938].

System Zermelo

Wspomniana już zasada abstrakcji jest tym rozstrzygnięciem, w którym zbiegają się drogi teorii typów i teorii mnogości. Ponieważ pierwotnie systemy teorii mnogości Zermelo zawierały tylko jeden rodzaj zmiennych, dlatego zasada abstrakcji musiała przybrać inną niż u Russella postać. Intuicyjny sposób tworzenia nowych zbiorów został zachowany poprzez ograniczenie zakresu zmienności funkcji wyznaczającej te zbiory. Otrzymano w ten sposób aksjomat wyróżniania $(\exists y)(x)(x \in y \equiv (x \in t) \wedge \phi x)$. Zauważmy, że funkcja ϕx jest sensowna, jeśli wartości jej argumentów należą do zbioru t. Można powiedzieć zatem, że zbiór t odpowiada Russellowskiemu pojęciu typu. Każda funkcja zdaniowa wyznacza pewien zbiór wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje inny zbiór, którego elementy są możliwymi wartościami argumentów tej funkcji. Jednakże w systemie Zermelo zbiór t w powyższym schemacie nie był bliżej sprecyzowany. Nie było wiadomo, jakimi własnościami ma się on charakteryzować. Schemat zakłada, że jest on już po prostu dany. Z tego też względu konieczne stało się wprowadzenie dodatkowych aksjomatów gwarantujących istnienie pewnych określonych niepustych zbiorów np. zbioru pary[14].

Dany zbiór wyznaczony przez pewną funkcję zdaniową jest po prostu podzbiorem pewnego innego zbioru, którego elementy są wartościami argumentów, dla których funkcja jest sensowna. Stąd można powiedzieć, że każdy utworzony w ten sposób zbiór jest podzbiorem pewnego typu. Dlatego zbiór wyznaczony jest zawsze przez funkcję sensowną i zgodnie z powyższym rozumieniem jest on albo zbiorem pustym (funkcja przyjmująca wartość fałszu), albo też jego elementy są argumentami, dla których funkcja przyjmuje wartość prawdy. Trudność jednak polega na tym, że istnieją

[14] Aksjomat pary: $(\exists y)(x)[x \in y \equiv \exists a \exists b(x = a \vee x = b)]$. Pierwsze systemy Zermelo i Skolema zawierały także inne aksjomaty gwarantujące istnienie klas spełniających następujące warunki; np.: 1. $(\exists y)(x)[x \in y \equiv (\exists z)(x \in z \wedge z \in w)]$ oraz 2. $(\exists y)(x)[x \in y \equiv (\exists z)(z \in x \rightarrow z \in w)]$. Patrz Quine [1958], s. 250, Quine [2000], s. 128.

formuły, których sensowności dla pewnych argumentów nie da się jednoznacznie określić. Jest tak w przypadku formuły $x \in x$. Russell doszedł do wniosku, że są one bezsensowne, gdyż naruszają zasady rządzące typami. W przypadku systemu Zermelo istnienie potencjalnych zbiorów wyznaczonych przez samoodnośne formuły zostało odrzucone przez aksjomat regularności. Aksjomat ten głosi, że

> dla każdej niepustej rodziny zbiorów a istnieje zbiór b, taki że $b \in a$ i $a \cap b = \emptyset$.

Na mocy aksjomatu regularności utrzymana zostaje hierarchia zbiorów, którą wyznacza relacja należenia elementu do zbioru. Podstawa aksjomatu regularności tkwi pośrednio w drugiej idei teorii typów. Nieprzypadkowo zarówno w teorii typów jak i w teorii mnogości Zermelo usunięto funkcje samoodnośne. Na marginesie zauważmy, że jedynie negacja tych funkcji prowadzi do antynomii. Sama funkcja $x \in x$ nie jest antynomialna. Usuwając antynomialną funkcję $\neg(x \in x)$, usunięto także w obu systemach szereg prawidłowo zbudowanych funkcji nieantynomialnych. Nic dziwnego, że od samego początku krytyka części badaczy została wymierzona właśnie w to słabo uzasadnione wykluczenie pewnych funkcji[15].

Systemy *NF i ML* Quine'a

Choć teoria typów i teoria mnogości posługują się innymi systemami notacyjnymi, to jednak przedstawione dwie podstawowe idee teorii typów są wykorzystywane także w teorii mnogości. W teorii typów jej obie idee zawarte są w pojęciach typu i funkcji predykatywnej. Z kolei w teorii mnogości gwarancją istnienia wartości dla argumentów funkcji jest zbiór, którego istnienie sankcjonuje aksjomat wyróżniania, zaś zakaz istnienia funkcji, której argumentem byłaby ona sama, ujmuje aksjomat regularności. Jednakże rozwiązanie przyjęte przez Zermelo w jego teorii mnogości

[15] Patrz Kuratowski, Mostowski [1978], s. 70.

nie satysfakcjonowało wszystkich badaczy. Uznanie za bezsensowne funkcji samoodnośnych ewidentnie nie miało charakteru czysto merytorycznego. Z tego też względu Quine przedstawił inne sformułowanie zasady abstrakcji. Aksjomat wyróżniania w systemie Zermelo korzystał, jak widzieliśmy, z pierwszej idei teorii typów. Tymczasem Quine w systemie *NF* (*New Foundations*)[16] powraca do pierwotnej idei wyznaczania klas przez funkcje zdaniowe: $(\exists y)(x)(x \in y \equiv fx)$. Wiemy, że aby uniknąć paradoksów, Russell nałożył na funkcje warunek typikalności, zaś Zermelo ograniczył zakres wartości zmiennych do pewnej klasy „poprzedzającej" klasę definiowaną. Quine natomiast, zachowując intuicyjny sposób tworzenia klas, wprowadził pojęcie stratyfikacji. Zadaniem stratyfikacji miała być z jednej strony ochrona przed typikalną wieloznacznością wyrażeń (co było charakterystyczne dla teorii typów), a z drugiej strony uniknięcie samego pojęcia typu, które Quine uznał za niepotrzebne nadużycie ontologiczne. Ponadto Quine'owskie pojęcie stratyfikacji nie dzieli wyrażeń na sensowne i bezsensowne, lecz na stratyfikowane i niestratyfikowane, przy czym te drugie traktuje jako w pełni sensowne wyrażenia. Aksjomatowi wyróżniania w systemie Zermelo, odpowiada następująca reguła R3' systemu *NF*:

> (R3') Jeżeli ϕ jest stratyfikowana i nie zawiera x, to $(\exists x)(y)((y \in x) \equiv \phi x)$ jest twierdzeniem[17].

Stratyfikacja jest bardzo prostym narzędziem zastępującym niezręczne pojęcie typu. W pracy *Nowe podstawy logiki matematycznej* Quine określa stratyfikację w następujący sposób: „formuła jest stratyfikowana, jeśli możliwe jest takie wstawienie liczb całkowitych za zmienne, że symbol „$\in$" pojawia się wyłącznie w kontek-

---

[16] System logiczny *NF* Quine'a został opublikowany po raz pierwszy w pracy Quine [1937]. Wersja poprawiona została zamieszczona w książce Quine [1953]. Sam tekst *New foundations for mathematical logic* został przyjęty do druku 16 listopada 1936, zaś po raz pierwszy został przedstawiony publicznie 31 grudnia 1936 roku.

[17] Patrz: Quine [2000], s. 123.

ście postaci „$n \in n + 1$”[18]. Pełniejszy opis stratyfikacji odnajdujemy w książce *Logika matematyczna*: „Formuła jest stratyfikowana, gdy można tak podstawić cyfry za zmienne (przy czym ta sama cyfra może pojawić się w miejscu wszystkich egzemplarzy tej samej zmiennej), że „$\in$” będzie zawsze otoczone przez dwie cyfry kolejnego ciągu rosnącego (tj. $n \in n + 1$)”[19]. Właściwe zastosowanie pojęcia stratyfikacji wymaga, by wszystkie formuły zostały wcześniej sprowadzone do notacji pierwotnej, czyli do notacji, gdzie skróty definicyjne, w których symbol „$\in$” zastąpiono innymi symbolami (np. inkluzji, identyczności, deskrypcji), mają swoją pełną postać zawierającą symbol „$\in$”. Quine podkreśla, że efekt wstawienia cyfr za zmienne ma wyłącznie charakter narzędzia, rodzaj swoistego diagramu.

Użycie reguły R3' wykorzystującej pojęcie stratyfikacji powoduje, że w systemie *NF* nie zachodzi paradoks Russella. Niemniej jednak nie mamy gwarancji istnienia klas wyznaczonych przez funkcje niestratyfikowane w rodzaju $x \in x$. Istnienie takich klas będzie zagwarantowane dopiero w teorii zbiorów nieufundowanych.

W obu systemach Quine'a (*NF i ML*) jednym z istotnych pojęć jest «operacja abstrakcji». Intuicyjny sposób określania klas jako ogółu wszystkich bytów spełniających dowolną funkcję zdaniową wymagał ograniczenia. Może ono polegać albo na nałożeniu ograniczeń na przedmioty, albo na nałożeniu ograniczeń na funkcję, albo na jednym i drugim. Zauważmy, że pierwsze ograniczenie wiąże się z pierwszą ideą teorii typów, zaś drugie z ideą drugą. Przy formułowaniu definicji abstrakcji skorzystano z pierwszego sposobu poprzez nałożenie na przedmioty warunku bycia elementem. Dlatego też operacja abstrakcji (oznaczona $\widehat{x}\phi$) definiowana jest następująco:

[18] Quine [1953], s. 91. W polskim tłumaczeniu autorstwa Barbary Stanosz nie ma tego zdania. Por. Quine [2000], s. 122.

[19] Quine [1974], s. 155.

$$y \in \widehat{x}\phi =_{df} (\exists z)((y \in z) \wedge (x)(x \in z \rightarrow \phi x))^{20}.$$

W roku 1951 ukazało się poprawione wydanie *Logiki matematycznej* Quine'a. Praca ta zawiera drugi system podstaw matematyki nazywany *ML*. W systemie tym omawiana problematyka dotyczy tzw. aksjomatów należenia. Odpowiednikiem aksjomatu wyróżniania systemu Zermelo jest następujący aksjomat należenia — oznaczony *202 w pracy Quine'a:

> (*202) Jeśli y nie jest x i nie jest wolne w ϕ, to następujące wyrażenie jest twierdzeniem:
>
> $$(\exists y)(x)(x \in y \equiv x \in V \wedge \phi x)^{21}.$$

Zarówno system *NF* jak i system *ML* zawierają, w przeciwieństwie do systemu Zermelo, klasę uniwersalną V. Klasa ta definiowana jest jako $V =_{df} \widehat{x}(x = x)$. Zawarty w powyższym aksjomacie zapis $x \in V$ oznacza, że x jest elementem[22]. W ten sposób niepotrzebny staje się w tymże aksjomacie warunek stratyfikacji funkcji ϕ wymagany w regule R3' systemu *NF*. Ponieważ jednak w systemach Quine'a klasa uniwersalna jest swoim własnym elementem, dlatego w aksjomacie zastrzega się, że $x \neq y$. Ponadto system *ML* zawiera aksjomat należenia — aksjomat *200 systemu Quine'a — który ustala warunki, dzięki którym klasy wyznaczone przez stratyfikowane formuły są elementami:

[20] Warto zwrócić uwagę na fakt, że definicja abstrakcji jest definicją kontekstową. Ponadto w systemach Quine'a (zwłaszcza w systemie *ML*) definicje dotyczą tzw. nazw quasi–cudzysłowowych. Aby nie komplikować wywodu usunąłem stosowane przez Quine'a naroża, przez co odnosi się wrażenie, że mowa jest o zdaniach, a nie o nazwach tych zdań. Szczegółowa dyskusja omawianej kwestii znajduje się w Quine [1974].

[21] Quine [1974], s. 160.

[22] Element jest tutaj rozumiany w zwyczajnym sensie. Zapis $x \in y$ oznacza, że x jest elementem y. Jednak Quine wprowadza pojęcie elementu, by podkreślić fakt, że nie wszystkie klasy mogą być elementami. Np. klasa Russella, tj. $\{x : x \notin x\}$, nie może być elementem innej klasy. Dany przedmiot jest elementem, o ile należy do klasy uniwersalnej. Patrz Quine [1974], s. 154.

> (*200) Jeśli ϕ nie zawiera oprócz $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ żadnych zmiennych wolnych i zbudowane jest z formuły stratyfikowanej przy ograniczeniu wszystkich zmiennych do elementów, to wyrażenie postaci: $(y_1, y_2, \ldots, y_n \in V \rightarrow \widehat{x}\phi \in V)$ jest twierdzeniem[23].

Ponieważ w systemach Quine'a zmienne nie są ograniczone tylko do jednego rodzaju przedmiotów, np. zbiorów jak ma to miejsce w systemie Zermelo, dlatego relacja należenia ma swój przypadek graniczny. Relacja należenia zachowuje się tak samo jak identyczność wtedy, gdy w wyrażeniu „$x \in y$", y nie jest klasą. W takim wypadku x jest tożsame z y. Przyjęcie omawianej liberalizacji pozwala na utożsamienia x z jego własnym singletonem $x = \{x\}$. Funkcją, która wyznacza zbiór $x = \{x\}$ jest oczywiście funkcja $x \in x$, jednak ze względu na fakt, iż nie spełnia ona warunku stratyfikacji, nie można wykazać istnienia odpowiadającej jej klasy na podstawie reguły R3' systemu *NF*. Nie spełnia ona również założeń aksjomatu należenia *202 systemu *ML*. Należy jednak pamiętać, że identyczność $x = \{x\}$ zachodzi tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z indywiduami i pytamy się o sens formuły głoszącej, że coś należy do tego indywiduum. W każdym innym wypadku mamy: $x \neq \{x\}$.

W systemie *NF* następuje liberalizacja obu idei teorii typów. Pierwsza idea zostaje pominięta[24], gdyż funkcje zdaniowe mogą przybierać dowolną postać, bez względu na gwarancję istnienia wartości argumentów funkcji. Z kolei druga idea teorii typów jest liberalizowana przez nałożenie na funkcję warunku stratyfikacji. Co więcej, w tej teorii klasy mogą być wyznaczane przez niestratyfikowane formuły, choć gwarancję istnienia na mocy reguły R3' uzyskują jedynie klasy wyznaczane przez formuły stratyfikowane. W przypadku systemu *ML* powraca pierwsza idea teorii typów.

---

[23] Quine [1974], s. 160. Pojęcie „elementu" w tym aksjomacie należy rozumieć tak, jak objaśniono w powyższym przypisie.

[24] Choć nawiązanie do pierwszej idei teorii typów można zauważyć w sposobie definiowania operacji abstrakcji (por. wyżej).

Gwarancją istnienia wartości argumentów dla funkcji jest klasa uniwersalna V. Odpowiednik reguły abstrakcji — aksjomat *202 — nie wymaga już pojęcia stratyfikacji, które pojawia się jednak w innym aksjomacie należenia tego systemu — aksjomacie *200.

Teoria zbiorów nieufundowanych

Niedogodność występująca w systemach Quine'a, polegająca na braku bezpośredniej gwarancji istnienia zbiorów wyznaczonych przez formuły niestratyfikowane, została przełamana w teorii zbiorów nieufundowanych (hiperzbiorów). Dziwić może jedynie fakt, że stało się to dopiero pół wieku po fundamentalnych pracach Quine'a. W połowie lat osiemdziesiątych XX wieku Peter Aczel przedstawił aksjomatyczną teorię, której podstawowym zadaniem było rozszerzenie uniwersum dotychczasowych zbiorów ufundowanych (czyli zgodnych z aksjomatem regularności) o zbiory nieufundowane, czyli takie, których aksjomat regularności zakazywał. W roku 1988 ukazała się praca Aczela zatytułowana *Non–well–founded sets*[25], w której w sposób systematyczny została przedstawiona nowa teoria mnogości. Rok wcześniej wydana została praca Barwise'a i Etchemendy'ego *The Liar*[26], w której do analizy paradoksu kłamcy wykorzystano pojęcie zbioru nieufundowanego. W latach następnych teoria zbiorów nieufundowanych pojawiła się w kilku podręcznikach teorii mnogości. Wymienić tutaj należy prace: Devlina *The Joy of Sets*[27] oraz Moschovakisa *Notes on Set Theory*[28]. W języku polskim ukazał się krótki artykuł Jacka Paśniczka omawiający filozoficzne problemy związane ze zbiorami nieufundowanymi[29]. Obszerną pracą poświęconą w całości problemowi hi-

[25] Aczel [1988].
[26] Barwise, Etchemendy [1987].
[27] Devlin [1993].
[28] Moschovakis [1994].
[29] Paśniczek [1995].

perzbiorów jest monografia Barwise'a i Mossa *Vicious Circles*[30]. Korzystając z tej ostatniej książki, naszkicuję podstawowe pojęcia teorii zbiorów nieufundowanych.

W klasycznej teorii mnogości zbiory są wyznaczone jednoznacznie przez swoje elementy. Z tego też względu podstawowym sposobem oznaczenia zbioru jest wyszczególnienie jego elementów, np. zbiór $T = \{a, b, p\}$ składa się z trzech elementów a, b, p. Możemy potraktować taki zapis jako pewne równanie. Rozwiązaniem tego równania będzie pewna funkcja, której wartościami będą konkretne zbiory. Rozwiązując równanie $t = \{x, y, p\}$ otrzymamy przykładowo zbiór T. Występowanie litery p zarówno w równaniu, jak i zbiorze T nie jest pomyłką. Możemy bowiem przyjąć, że nasze uniwersum obejmuje nie tylko zbiory, ale także i atomy, czyli takie elementy, które nie zawierają już żadnych innych elementów, a nie są zbiorem pustym[31]. Zwróćmy uwagę, że nasz przykładowy zbiór T może być bardziej skomplikowany. Jeśli jego niektóre elementy byłyby zbiorami np. $a = \{\emptyset, p\}$, $b = \{a, p\}$, to wówczas moglibyśmy zapisać odpowiednie równania i próbować je rozwiązywać: $x = \{\emptyset, p\}$, $y = \{x, p\}$. Nasz zmodyfikowany zbiór $T = \{\{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, p\}, p\}$ byłby szukaną wartością rozwiązania równania o postaci: $t = \{\{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, p\}, p\}$, co jest mało interesujące, albo też jedną z wartości rozwiązania poniższego układu równań:

$$\begin{aligned} t &= \{x, y, p\}, \\ x &= \{\emptyset, p\}, \\ y &= \{x, p\}. \end{aligned}$$

Uściślimy teraz dwa pojęcia, a mianowicie: pojęcie układu równań i pojęcie rozwiązania układu równań.

---

30 Barwise, Moss [1996].

31 Przyjęcie atomów nie jest konieczne. Można bowiem równie dobrze ograniczyć zakres uniwersum do zbiorów czystych, czyli zbudowanych tylko na zbiorze pustym. Istnienie atomów pozwala jednak na łatwe zastosowanie omawianej teorii w praktyce.

Definicja 1[32]. *Układem równań* E nazywamy trójkę $E = \langle X, A, e\rangle$ złożoną ze zbioru X niewiadomych, zbioru A atomów rozłącznego z X i dowolnej funkcji

$$e : X \to P(X \cup A).$$

Dla każdego $\nu \in X$, zbiór $b(\nu) =_{df} e(\nu) \cap X$ nazywamy zbiorem niewiadomych zależnych od ν, zaś zbiór $c(\nu) =_{df} e(\nu) \cap A$ nazywamy zbiorem atomów, zależnych od ν.

Definicja 2[33]. *Rozwiązaniem* układu E jest funkcja s, której dziedziną jest zbiór X, spełniająca warunek:

$$s(x) = \{s(y) : y \in b(x)\} \cup c(x),$$

dla każdego $x \in X$.

Przedstawione definicje wymagają pewnego wyjaśnienia. Przeciwdziedziną funkcji e jest zbiór potęgowy sumy zbiorów X i A. Istnienie zbioru potęgowego jest w teorii mnogości zagwarantowane przez aksjomat zbioru potęgowego, który mówi, że:

> Dla każdego zbioru A istnieje rodzina zbiorów P, której elementami są wszystkie podzbiory zbioru A i tylko one. Symbolicznie: $(\forall A)(\exists P)(\forall c)(c \subseteq A \equiv c \in P)$. Ponieważ zbiór P jest wyznaczony jednoznacznie przez zbiór A, dlatego nazywamy go zbiorem potęgowym zbioru A i oznaczamy przez $P(A)$.

Ponieważ naszym zamiarem jest to, aby wartościami rozwiązań układów równań były zbiory (ewentualnie atomy), funkcja s będzie przyjmowała wartości w klasie uniwersalnej. W teorii zbiorów nieufundowanych powraca idea rozróżnienia na klasę i zbiór[34]. To

[32] Barwise, Moss [1996], s. 71.

[33] Barwise, Moss [1996], s. 72.

[34] Należy zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie rozróżnienia na klasę i zbiór, a także wprowadzenie klasy uniwersalnej odróżnia teorię zbiorów nieufundowanych od systemu Zermelo. Wydaje się zatem, że teoria zbiorów nieufundowanych nie jest prostym rozszerzeniem systemu Zermelo–Fraenkla, polegającym na usunięciu aksjomatu regularności i wprowadzeniu aksjomatu antyufundowania.

rozróżnienie obejmuje między innymi zasady, że każdy predykat określa klasę, mianowicie klasę wszystkich zbiorów, które spełniają dany predykat oraz że klasa będąca elementem innej klasy jest zbiorem. W tym sensie klasa jest pojęciem szerszym niż pojęcie zbioru. Należy zauważyć, że ta druga zasada nie jest zgodna z intuicją wyrażoną w tezie systemu Quine'a, że $V \in V$[35].

Wprowadźmy nadto definicję zbioru, którego elementami będą wartości rozwiązań wszystkich równań danego układu.

Definicja 3. Przez zbiór rozwiązań (*solution set*) dowolnego układu równań E rozumiemy zbiór oznaczany skrótem $SS(E)$:

$$SS(E) =_{df} \{s(\nu) : \nu \in X\},$$

gdzie s jest rozwiązaniem układu E.

Powyższe definicje zilustrujemy przykładami. Przyjmijmy na potrzeby naszego przykładu, że do zbioru A atomów należy także zbiór pusty. Zabieg ten jest o tyle uzasadniony, że zbiór pusty pełni podobną rolę co atomy, mianowicie funduje nasze rozważane uniwersum. Zgodnie z definicją 1 możemy określić zbiór X niewiadomych oraz zbiór A atomów naszego przykładowego układu równań.

$$\begin{aligned} e(t) &= \{x, y, p\}, \\ e(x) &= \{\emptyset, p\}, \\ e(y) &= \{x, p\}. \end{aligned}$$

Mamy więc $X = \{t, x, y\}$ oraz $A = \{\emptyset, p\}$, następnie określamy zbiory niewiadomych i atomów zależnych od poszczególnych zmiennych:

[35] Odnośnie tezy Quine'a patrz Quine [1974], s. 161. Zgodnie z przytoczoną zasadą drugą, klasa V jest zbiorem. Tym samym zasada $V \in V$ sugeruje, że klasa jest elementem zbioru.

$$\begin{array}{ll} b(t) = \{x, y\}; & c(t) = \{p\}; \\ b(x) = \emptyset; & c(x) = \{\emptyset, p\}; \\ b(y) = \{x\}; & c(y) = \{p\}. \end{array}$$

Kolejnym krokiem jest ustalenie rozwiązań równań układu:

$$\begin{aligned} s(t) &= \{s(x), s(y), p\}, \\ s(x) &= \{\emptyset, p\}, \\ s(y) &= \{\{\emptyset, p\}, p\}. \end{aligned}$$

Zgodnie z definicją 3 zbiór rozwiązań naszego układu E ma następującą postać:
$SS(E) = \{\{\{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, p\}, p\}, \{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, p\}\}$. Jego elementami są trzy zbiory będące wartościami rozwiązania całego układu E.

Wydawałoby się, że przedstawione definicje i poszczególne operacje są trywialne i nie ma w nich nic specjalnie interesującego. Okazuje się jednak, że wykorzystując wprowadzone definicyjnie pojęcia, będziemy mogli analizować przedmioty, które w teorii *ZF* nie istniały. Zmodyfikujmy nieznacznie nasz przykładowy zbiór T. Niech zbiór $T^{'}$ ma taką oto postać:

$$T^{'} = \{\{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, T^{'}\}, p\}.$$

Jest jasne, że zbiór $T^{'}$ nie może istnieć w systemie *ZF*, gdyż jest sprzeczny z aksjomatem regularności. Twór taki oczywiście nie może istnieć w teorii typów, a także ewentualna formuła wyznaczająca ten zbiór byłaby formułą niestratyfikowaną. Znana już procedura wykorzystująca pojęcie układu równań wyglądałaby w sposób przedstawiony poniżej.

Układ równań $E_{T'}$ ma postać:

$$e(t) = \{x, y, p\},$$
$$e(x) = \{\emptyset, p\},$$
$$e(y) = \{x, t\}.$$

Zbiory niewiadomych oraz atomów mają postać, odpowiednio: $X = \{t, x, y\}$ oraz $A = \{\emptyset, p\}$, następnie określamy zbiory niewiadomych i atomów zależnych od poszczególnych zmiennych:

$$\begin{array}{ll} b(t) = \{x, y\}; & c(t) = \{p\}; \\ b(x) = \emptyset; & c(x) = \{\emptyset, p\}; \\ b(y) = \{x, t\}; & c(y) = \emptyset. \end{array}$$

Następnie ustalamy rozwiązania poszczególnych równań:

$$s(t) = \{s(x), s(y), p\},$$
$$s(x) = \{\emptyset, p\},$$
$$s(y) = \{\{\emptyset, p\}, s(t)\}.$$

Ostatecznie ustalamy zbiór rozwiązań układu $E_{T'}$, a mianowicie:

$$SS(E_{T'}) = \{\{\{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, s(t)\}, p\}, \{\emptyset, p\}, \{\{\emptyset, p\}, s(t)\}\}.$$

Gdy przyjrzymy się elementom zbioru $SS(E_{T'})$, nasunie się wątpliwość co do jednoznacznego określenia ich elementów. Czy może istnieć zbiór T'? Fakt, że zbiór jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje elementy sugeruje, że dla układu równań, w których nie występują zapętlenia, istnieje jedno rozwiązanie. Czy układ $E_{T'}$ ma rozwiązanie? Jeśli tak, to ile? Teoria zbiorów nieufundowanych odpowiada na powyższe kwestie poprzez wprowadzenie aksjomatu antyufundowania, który głosi, że

Każdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie[36].

[36] W pierwszych pracach omawiających zbiory nieufundowane, aksjomat antyufundowania, wykorzystując pojęcie grafu i dekoracji głosił, że każdy graf posiada dokładnie jedną dekorację. Por. Aczel [1988] s. 6. Przedstawiona w niniejszej pracy wersja aksjomatu nosi także nazwę lematu o rozwiązaniu (*solution lemma*)

Wprowadzenie do systemu *ZF* aksjomatu antyufundowania w miejsce aksjomatu regularności powoduje rozszerzenie uniwersum zbiorów o nowego rodzaju przedmioty nazywane zbiorami nieufundowanymi (hiperzbiorami). Tym samym nasz przykładowy układ $E_{T'}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli istnieje dokładnie jedna funkcja przyporządkowująca każdej zmiennej układu zbiór (ufundowany bądź nie). Aksjomat antyufundowania jest, czego może na pierwszy rzut oka nie widać, gwarantem istnienia zbiorów nieufundowanych. Najprostszym przykładem zbioru nieufundowanego jest słynny już zbiór $X = \{X\}$, który Peter Aczel nazwał zbiorem Ω[37]. Przyjęcie aksjomatu antyufundowania sprawia, że istnieje tylko jeden zbiór spełniający formułę „$x \in x$", a mianowicie wspomniany już zbiór Ω, choć oczywiście jest on wartością rozwiązań nieskończonej liczby różnych układów równań.

Dowód jedyności zbioru Ω skłania do zastanowienia się nad problemem warunków, jakie muszą spełniać układy równań, aby ich rozwiązania były identyczne. Problem ten jest innym sformułowaniem zagadnienia identyczności zbiorów. W teorii mnogości *ZF* kwestia identyczności zbiorów jest rozwiązana przez wprowadzenie aksjomatu ekstensjonalności. Aksjomat ekstensjonalności głosi, że dwa zbiory są identyczne, jeśli mają jednakowe elementy. Symbolicznie: $(\forall x)[x \in A \equiv x \in B] \rightarrow (A = B)$.

Jednakże w przypadku zbiorów nieufundowanych aksjomat powyższy nie spełnia swojej funkcji. Weźmy dwa zbiory: $A = \{B\}$ i $B = \{A\}$ i sprawdźmy, czy są one identyczne. Z aksjomatu ekstensjonalności mamy, że $A = B$, jeśli $B = A$, co oczywiście nie jest rozstrzygnięciem naszego problemu. Jeśli zastosujemy opisane już pojęcia układu równań i rozwiązania układu równań, to okaże się, że zbiory A i B są identyczne ze zbiorem Ω.

[37] Por. Aczel [1988], s. 6. Zbiór Ω jest wartością rozwiązania s równania postaci $e_x = \{x\}$. Jeśli $a \neq \Omega$ byłoby zbiorem takim, że $a = \{a\}$, to a byłby wartością rozwiązania t równania postaci $e_x = \{x\}$. Zgodnie z aksjomatem antyufundowania mamy $t = s$. Zatem $a = \Omega$.

Weźmy z kolei dwa przykładowe układy równań. Niech układy E^1 i E^2 składają się z następujących równań:

$$\begin{aligned} \text{układ } E^1\text{:}\quad & e^1_x = \{x\} \qquad \text{oraz} \\ \text{układ } E^2\text{:}\quad & e^2_x = \{y\}, \\ & e^2_y = \{x, z\}, \\ & e^2_z = \{x\}. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętym aksjomatem antyufundowania każdy z układów E^1 i E^2 ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jednakże okazuje się, że wartością rozwiązania każdego z równań obu układów jest ten sam zbiór Ω. Problem identyczności zbiorów nieufundowanych zmusza do poszukania innego kryterium identyczności niż to, które zawarte jest w aksjomacie ekstensjonalności. Kryterium takie nosi nazwę relacji bisymulacji. Zagadnienie bisymulacji jest problemem dość obszernym, dlatego zostanie tutaj jedynie naszkicowane.

Definicja 4[38]. Mówimy, że relacja R jest *relacją bisymulacji zbiorów* wtw, gdy R jest relacją zachodzącą między zbiorami, spełniającą następujące warunki:

Jeśli aRb, to

(1) dla każdego zbioru $c \in a$ istnieje zbiór $d \in b$ taki, że cRd,

(2) dla każdego zbioru $d \in b$ istnieje zbiór $c \in a$ taki, że cRd,

(3) $a \cap U = b \cap U$, gdzie U jest uniwersum wszystkich atomów.

Relacja identyczności zbiorów musi spełniać warunki bisymulacji. Oznacza to, że aby wykazać identyczność zbiorów, nie można opierać się jedynie na aksjomacie ekstensjonalności. Przy ustalaniu identyczności zbiorów w poszerzonym o zbiory nieufundowane uniwersum bardzo istotna staje się struktura ich elementów. Podstawową relacją, która ustala strukturę zbioru, jest oczywiście relacja należenia.

[38] Barwise, Moss [1996], s. 81.

Odrzucenie aksjomatu regularności, gwarancja istnienia zbiorów wyznaczonych przez dowolne formuły oraz poszerzenie uniwersum zbiorów o hiperzbiory sugeruje, że teoria zbiorów nieufundowanych odrzuca drugą ideę teorii typów. Aksjomat antyufundowania, zastępując aksjomat regularności, sankcjonuje istnienie dowolnych funkcji zdaniowych. Wydaje się jednak, że pierwsza idea teorii typów zostaje w teorii hiperzbiorów utrzymana. Wskazuje na to obecność aksjomatu wyróżniania. Należy jednak pamiętać, że w rozszerzonym uniwersum zbiorów, także na mocy aksjomatu wyróżniania, istnieją podzbiory zbiorów nieufundowanych.

Podsumowanie

Odkrycie na początku XX wieku antynomii Russella przyczyniło się do rozwoju różnorodnych teorii logiczno–matematycznych. Pierwotnym rozwiązaniem problemów związanych z antynomią była teoria typów. W dalszej kolejności teorię typów wyparły różnorodne aksjomatyczne teorie mnogości. Zaproponowana przez Russella teoria typów wyznaczyła szereg możliwych sposobów uniknięcia antynomii. Teoria mnogości Zermelo, systemy Quine'a i w końcu teoria zbiorów nieufundowanych w różnorodny sposób wykorzystały rozwiązania teorii typów. Poniższa tabela przedstawia te wzajemne związki.

	Teoria typów	**Teoria mnogości Zermelo**	**System *NF* Quine'a**	**System *ML* Quine'a**	**Teoria zbiorów nieufundowanych**
I idea teorii typów	pojęcie typu i funkcji predykatywnej	aksjomat wyróżniania	reguła abstrakcji R3'	aksjomat należenia *202	aksjomat wyróżniania
II idea teorii typów	pojęcie typu i funkcji predykatywnej	aksjomat regularności	stratyfikacja	stratyfikacja w aksjomacie należenia *200	aksjomat antyufundowania

Bibliografia

Aczel Peter

[1988] *Non–well–founded sets*, CSLI Publications, Stanford.

Barwise Jon, Etchemendy John

[1987] *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, New York.

Barwise Jon, Moss Lawrence

[1996] *Vicious Circles. On the Mathematics of Non–Wellfounded Phenomena*, CSLI Publications, Stanford.

Devlin Keith

[1993] *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer–Verlag, New York.

Kuratowski Andrzej, Kazimierz Mostowski

[1978] *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, PWN, Warszawa.

Marciszewski Witold (red.)

[1988] *Mała encyklopedia logiki*, Ossolineum, Wrocław.

Moschovakis Yiannis

[1994] *Notes on Set Theory*, Springer–Verlag, New York.

Murawski Roman

[2001] *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN.

Paśniczek Jacek

[1995] *Filozoficzne znaczenie hiperzbiorów*, w: „Filozofia/Logika: Filozofia Logiczna 1994", J. Perzanowski, A. Pietruszczak, C. Gorzka (red.), Wyd. Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, ss. 49–65.

Quine Willard Van Orman

[1937] *New foundations for mathematical logic*, „American Mathematical Monthly", 44, ss. 70–80.

[1938] *On the Theory of Types*, „Journal of Symbolic Logic", t. 3 (1938), ss. 125–139.

[1953] *From a logical point of view*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

[1958] *Methods of Logic*, Routledge & Kegan Paul, London.

[1974] *Logika matematyczna*, tłum. Leon Koj, PWN, Warszawa.

[2000] Z *punktu widzenia logiki*, tłum. Barbara Stanosz, Fundacja Aletheia, Warszawa.

Russell Bertrand

[1908] *Mathematical logic as based on the Theory of Types*, w: Russell [1956], ss. 59–102.

[1956] *Logic and Knowledge. Essays 1901–1950*, Allen and Unwin, London.

[1971] *Mój rozwój filozoficzny*, tłum. Leon Koj, PWN, Warszawa.