Semina ☐ Nr 4
Scientiarum 2005

Łukasz Mścisławski OP

Dziwne twierdzenie z teorii kwantów

Twierdzenie Kochena – Speckera jest twierdzeniem frapującym (mimo, że na pierwszy rzut oka wygląda na zupełnie zwyczajne twierdzenie matematyczne), zwłaszcza jeśli bierze się pod uwagę jego konsekwencje. W niniejszym artykule przedstawię jego sformułowanie, a następnie postaram się omówić najbardziej intrygujące implikacje tego twierdzenia.

Zagadnienia wstępne

Teoria kwantów jest teorią fizyczną, o której interpretację toczą się nieustanne boje.[1]Wielu uczonych uważa pragmatyczne podejście do teorii kwantów za zupełnie wystarczające, choćby z tego powodu, że nie trzeba się wtedy zajmować trudnymi i czasem niewygodnymi pytaniami. W ramach takiej interpretacji teorii kwantów nie przypisuje się znaczenia pojedynczym pomiarom, lecz ich seriom. Interpretacje takie ideowo znajdują się blisko rezultatów charakterystycznych dla klasycznej fizyki statystycznej

[1] Wystarczy wspomnieć choćby kilka prac: Bohr, N. *Fizyka atomowa a wiedza ludzka*, PWN, Warszawa 1963; DeWitt, B., Graham, N. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princetion University Press, Princeton, 1973; Bohm, D., Hiley, B. *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory*, Routledge, London, 1993; z nowszych: Skala, L., Kapsa, V., *Quantum mechnics needs no interpretation*, http://arxiv.org/abs/quant-ph/0412175; Dennis, E., Norsen, T. *Quantum theory: interpretation cannot be avoided*, http://arxiv.org/abs/quant-ph/0408178.

i w ich ramach zasadniczo nie powstają specjalne trudności natury filozoficznej. Prawdopodobieństwo ma wówczas charakter epistemologiczny — odnosi się do *wiedzy* o obiektywnie istniejącym stanie rzeczy, a dyspersja jest miarą niewiedzy o wartości mierzonej wielkości fizycznej. Kiedy jednak podejmowane są próby sformułowania kosmologii kwantowej, takie stanowisko rodzi wiele zastrzeżeń, gdyż wówczas rozważanym pojedynczym układem, na którym, *nota bene*, dokonywany jest tylko jeden pomiar, jest cały wszechświat. Codzienna percepcja rzeczywistości fizycznej, otaczającej człowieka, bedąca swego rodzaju pomiarem (oraz, oczywiście, pomiary naukowe), świadczy o tym, że w tym przypadku jest jednak sens mówić o pomiarach na pojedynczym układzie, na dodatek przeprowadzanych tylko raz!

W tym kontekście często pojawiają się sugestie, że tego rodzaju podejście nie jest ostatecznym ujęciem rzeczywistości fizycznej. Co prawda istnieje niechęć przed przyznawaniem obiektywnego statusu właściwościom pojedynczego układu kwantowego, związana z wątpliwością co do tego, czy wynika z niego jakikolwiek spójny obraz rzeczywistości. Wysiłki prowadzące do przeforsowania ujęć filozoficznych, które miałyby reprezentować bardziej realistyczne stanowiska poprzez przypisywanie jakichś ukrytych właściwości pojedynczym układom kwantowym, prowadzą zwykle do propozycji tak niejasnych, że trudno je traktować inaczej, jak tylko jako impulsy stymulujące poszukiwanie nowych kategorii koncepcyjnych.

Podstawowym założeniem takiej „bardziej realistycznej" interpretacji teorii kwantów jest teza, że indywidualny układ kwantowy *posiada* w każdej chwili *własności*. Przez *własność* rozumie się to, że obserwabla A posiada pewną określoną wartość a. Innymi słowy, domniemuje się istnienie takiej funkcji $V_{\vec{\psi}}(A)$, która może być interpretowana jako *wartość* fizycznej wielkości A dla układu w stanie kwantowym $\vec{\psi}$.

Na gruncie fizyki klasycznej nie ma problemu z tak rozumianą *własnością*.[2] Każdej fizycznej wielkości A odpowiada funkcja $f_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{S}$ jest tutaj klasyczną przestrzenią stanów) taka, że wartość wielkości A dla stanu $s \in \mathcal{S}$ jest wartością f_A dla s:

$$V_s(A) = f_A(s) \tag{1}$$

Przejście na grunt teorii kwantów znacznie komplikuje sytuację. Nie ma bowiem pomysłu, który pomógłby wyliczać wartość $V_{\vec{\psi}}(A)$ dla jakiejkolwiek pary $(A, \vec{\psi})$. W zasadzie jest to możliwe, w sposób nie budzący specjalnych zastrzeżeń, tylko dla jednego przypadku: kiedy $\vec{\psi}$ jest wektorem własnym $\vec{\psi}_n$ operatora $\widehat{A}$, reprezentującego wielkość A.[3] Wówczas wystarczy przypisać funkcji $V_{\vec{\psi}_n}(A)$ wartość własną a_n. Jednak, jak dotąd, nie wiadomo, w jaki sposób można by wyliczać wartości$V_{\vec{\psi}}(A)$ dla innych przypadków. Jedyną heurystyczną metodą, jaką można się posłużyć w poszukiwaniu takich funkcji, jest poszukiwanie funkcji spełniających pewne wymagania.

Twierdzenie Kochena – Speckera

Zanim przedstawię samo twierdzenie, omówię wymagania, o których wyżej była mowa. Zapoznanie się z nimi będzie istotne dla późniejszej analizy konsekwencji rozważanego twierdzenia. Zupełnie naturalnym żądaniem wydaje się, żeby dla każdej funkcji $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zachodził warunek:

$$V_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(V_{\vec{\psi}}(A)), \tag{2}$$

którego spełnienie powoduje, że dla dowolnego stanu $\vec{\psi}$, wartość funkcji wielkości fizycznej jest równa wartości tej funkcji liczo-

[2] Obszerniejsze omówienie tematu: Isham, Ch. *Lectures On Quantum Theory. Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press, 1997, ss. 67-73.

[3] Sytuacja taka wynika z jednego z postulatów teorii kwantów, według którego jedynymi wartościami, jakie można otrzymać w trakcie pomiaru, są wartości własne operatora $\widehat{A}$

nej dla wartości tej wielkości. Istnieje także możliwość zdefiniowania $\mathcal{F}(A)$ w taki sposób, że będzie ona związana z operatorem $\mathcal{F}(\widehat{A})$.[4] Jednak ma to sens tylko wtedy, jeżeli odwzorowanie kwantowania, przypisujące wielkości fizycznej operator samosprzężony ma następujące własności: 1) jest odwzorowaniem *na* — gwarantuje to, że $\mathcal{F}(\widehat{A})$ jest kwantową reprezentacją jakiejś wielkości fizycznej, oraz 2) jest to odwzorowanie jeden–do–jednego, co oznacza, że wielkość tak zdefiniowana jest wielkością jedyną.[5]

Warunek (**??**) pociąga za sobą następujące konsekwencje:

1. Jeżeli $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$, funkcja $V_{\vec{\psi}}$ jest *addywna*, co oznacza, że dla każdego $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$V_{\vec{\psi}}(A + B) = V_{\vec{\psi}}(A) + V_{\vec{\psi}}(B) \tag{3}$$

gdzie $A+B$ oznacza fizyczną wielkość związaną z operatorem samosprzężonym $\widehat{A} + \widehat{B}$.

2. Jeżeli $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$, to funkcja $V_{\vec{\psi}}$ jest *multiplikatywna*, a zatem dla każdego $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$V_{\vec{\psi}}(AB) = V_{\vec{\psi}}(A)V_{\vec{\psi}}(B) \tag{4}$$

gdzie, analogicznie do poprzedniej sytuacji, AB oznacza fizyczną wielkość związaną z operatorem samosprzężonym $\widehat{A}\widehat{B}$.

---

[4] Wprowadzenie takiej funkcji, którą można bardziej traktować jako funkcję operatorów samosprzężonych pozwala zapobiec tautologii, która nieuchronnie pojawi się, gdy funkcję $\mathcal{F}(A)$ *zdefiniuje się* jako własność fizyczną (we wspomnianym wcześniej sensie). Ponadto, w przeciwieństwie do podejścia pragmatycznego, w ramach podejścia realistycznego, które było zakładane na początku, definicje operacyjne z zastosowaniem pojęć odnoszących się do pomiaru, są niewłaściwe (choćby z uwagi na fakt, że realistyczne potraktowanie własności fizycznych zakłada, że istnieją one *niezależnie* od pomiaru).

[5] Przy takich założeniach, można uważać $V_{\vec{\psi}}$ bardziej za funkcję operatorów samosprzężonych niż wielkości fizycznych.

3. Niech $\mathbf{1}$ oznacza wielkość fizyczną, odpowiadającą jednostkowemu operatorowi $\widehat{\mathbf{1}}$. Wówczas, na podstawie (**??**), przyjmując $A := \mathbf{1}$, widać, że dla każdego $\vec{\psi}$, $V_{\vec{\psi}}(B) = V_{\vec{\psi}}(\mathbf{1})V_{\vec{\psi}}(B)$, a więc $\forall\ \vec{\psi} \in \mathcal{H}$ zachodzi:

$$V_{\vec{\psi}}(\mathbf{1}) = 1 \tag{5}$$

co sprawia, że istnieje przynajmniej jedna wielkość fizyczna B, dla której $V_{\vec{\psi}}(B) \neq 0$.

Własność (**??**) ma istotne znaczenie dla wielkości fizycznej P, której reprezentacją jest operator rzutowania $\widehat{P}$. Ponieważ $\widehat{P}^2 = \widehat{P}$, stąd $V_{\vec{\psi}}(P)^2 = V_{\vec{\psi}}(P^2) = V_{\vec{\psi}}(P)$, a więc

$$V_{\vec{\psi}}(P) = 0 \quad \text{lub} \quad V_{\vec{\psi}}(P) = 1 \tag{6}$$

Wynika stąd, że jeżeli wielkość P będzie traktowana jako zdanie dotyczące układu kwantowego, to $V_{\vec{\psi}}$ przypisuje temu zdaniu, dla danego stanu $\vec{\psi}$ wartość *PRAWDY* lub *FAŁSZU.*

Niech teraz dany będzie zbiór operatorów rzutowania $\{\widehat{P_1}, \widehat{P_2}, ..., \widehat{P_n}\}$, które tworzą rozwinięcie identyczności, a zatem spełniających: $\widehat{P_i}\widehat{P_j} = 0$ dla $i \neq j$ oraz

$$\widehat{P_1} + \widehat{P_2} + ... + \widehat{P_n} = \widehat{\mathbf{1}} \tag{7}$$

Jeżeli przyjąć realistyczną (w jakimkolwiek sensie) interpretację teorii kwantów, to takie zdania P_i zapewniają, że dana wielkość A *ma* szczególną, jedną wartość a_i. To pociąga za sobą następujące dwie konsekwencje. Po pierwsze zbiór $\{P_1, P_2, .., P_n\}$ jest zbiorem zdań wzajemnie się *wykluczających*, co oznacza, że w danym momencie *tylko jedno zdanie może być prawdziwe.* Drugą konsekwencją jest wymóg, żeby *co najmniej jedno* zdanie było prawdziwe w danym momencie. Obie własności spełniają zwykłe rozumienie prawdy i fałszu w kompletnym zbiorze wykluczających się zdań: jedno i tylko jedno z nich może być prawdziwe. Takie oczekiwania są zgodne z formalizmem — biorąc pod uwagę (**??**) oraz (**??**) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} V_{\vec{\psi}}(P_i) = 1 \tag{8}$$

dla wszystkich wektorów stanów $\vec{\psi}$. Co więcej, ze względu na (**??**), wyrażenie (**??**) może przyjmować także tylko wartość 1. Wartość tę uzyskuje ono wtedy, gdy któreś ze zdań jest (i w świetle wymagań formalizmu musi być) prawdziwe (czyli ma wartość 1), a pozostałe są fałszywe (czyli mają wartość 0).

Zgodnie z powyższymi rezultatami, jeżeli $\widehat{P_i} = |e_i\rangle\langle e_i|$ (a więc, gdy $\widehat{P_i}$ jest operatorem rzutowania na wektor $|e_i\rangle$), gdzie zbiór wektorów $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, ...\}$ jest dowolną ortonormalną bazą przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, wówczas dla dowolnego stanu $\vec{\psi}$ funkcja $V_{\vec{\psi}}$ *musi* przypisać liczbę 1 do jednego i tylko jednego z operatorów rzutowania na jednowymiarową podprzestrzeń w $\mathcal{H}$ (ściślej: przypisać ją jednemu ze zdań), a wszystkim pozostałym przypisać 0. Ale przecież każdy wektor $|e_i\rangle$ może należeć do wielu ortonormalnych baz w $\mathcal{H}$, a przypisana wartość nie może zależeć od wyboru bazy w $\mathcal{H}$. Wymagania te są na tyle trudne do pogodzenia, że jak się okazuje, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

> **Twierdzenie Kochena – Speckera**:
> Dla danej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, $dim(\mathcal{H}) > 2$, nie istnieje funkcja $V_{\vec{\psi}}$.

Dowód twierdzenia jest dość obszerny, można go znaleźć w oryginalnej pracy S. Kochena i E. Speckera: *The problem of hidden variables in quantum mechanics*.[6]

[6] *Journal of Mechanics and Mathematics*, 17, ss. 59-87. Interesujące są także inne sposoby przeprowadzania dowodu twierdzenia, a także dyskusja nad jego konsekwencjami (np. Redhead *Incompleteness, Nonlocality and Realism*, Clarendon Press, Oxford 1989; Peres, A. *Two simple proofs of the Kochen – Specker theorem*, Journal of Physics, a 24, L175-L178; Peres, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic, Boston 1993).

Konsekwencje

Aparat formalny, którego teoria kwantów dostarczyła do skonstruowania funkcji $V_{\vec{\psi}}$ pozostaje bez zarzutu. Poczyniono jednak pewne założenia dotyczące samej funkcji, które nie wynikają z tej teorii, a mianowicie:

1. postawiono *naturalny* warunek (**??**): $V_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(V_{\vec{\psi}}(A))$;

2. założono, że odwzorowanie $A \rightarrow \widehat{A}$ jest odwzorowaniem jeden-do-jednego.

Jak już wspomniano, istnienie funkcji $V_{\vec{\psi}}$, jest bardzo pożądane w interpretacjach, w których stopień realizmu ma być większy, niż w podejściu pragmatycznym. Tymczasem twierdzenie Kochena – Speckera pociąga za sobą konieczność odrzucenia jednego z przyjętych przez nas założeń. Za Ishamem przedstawię konsekwencje takiego kroku w stosunku do poszczególnych założeń.

Ad 1. Sytuacja, w której pierwsze z tych założeń jest zawodne, może być następująca. Niech operator samosprzężony $\widehat{A}$ będzie takim operatorem, że może być wyrażony jako funkcja pary pewnych operatorów samosprzężonych $\widehat{A_1}$ i $\widehat{A_2}$. Wówczas $\widehat{A} = f_1(\widehat{A_1})$ oraz $\widehat{A} = f_2(\widehat{A_2})$, przy czym $[\widehat{A_1}, \widehat{A_2}] \neq 0$. Wówczas (**??**) pociąga za sobą warunek kolejny:

$$f_1(V_{\vec{\psi}}(A_1)) = f_2(V_{\vec{\psi}}(A_2)), \tag{9}$$

co powoduje to (o ile nie zachodzi $[\widehat{A_1}, \widehat{A_2}] \neq 0$), że takie założenie byłoby po prostu niepotrzebne. Jeśli da się, przy pomocy pomiaru, otrzymać jakąś wartość pewnej wielkości fizycznej (to także jest założenie, ale wydaje się ono całkiem racjonalne), to (**??**) powoduje to, że pomiar A_1 i podziałanie na jego rezultat przy pomocy funkcji f_1 musi dać taki sam rezultat, co analogiczna procedura w stosunku do A_2 z zastosowaniem funkcji f_2. Jeśli jednak $[\widehat{A_1}, \widehat{A_2}] \neq 0$, to wówczas nie ma dobrego uzasadnienia dla tego założenia i warunek (**??**) należałoby odrzucić. Odrzucenie tego warunku ma jednak daleko idące konsekwencje. Jeżeli bowiem $\widehat{A_1}$ i $\widehat{A_2}$ są niekomutującymi operatorami samosprzężonymi, które w rozwinięciach spektralnych zawierają jakiś wspólny operator $\widehat{P}$, to ten operator można zapisać jako pewną funkcję operatora $\widehat{A_1}$ oraz, analogicznie, jako inną funkcję operatora $\widehat{A_2}$. Odrzucenie warunku (**??**) powoduje, że wartość przypisana wielkości P (czy też prawdziwość lub fałszywość związanego z nią zdania) zależy od kontekstu rozpatrywania reprezentującego ją operatora $\widehat{P}$. W konsekwencji wartości wielkości P będą różne i zależne od tego, czy operator ten jest rozpatrywany jako należący do rozwinięcia spektralnego operatora $\widehat{A_1}$ czy $\widehat{A_2}$! Można też to sformułować równoważnie, mówiąc, że wartość danej wielkości fizycznej zależy od tego, jakie inne wielkości fizyczne mają w tym samymczasie przypisane (określone) wartości. Obrazowo (!) rzecz ujmując, odrzucenie założenia (**??**) i, w konsekwencji (**??**), sprawia, że gdy chcemy zmierzyć temperaturę grzejnika elektrycznego, jej wartość, przy identycznym przygotowaniu tegoż grzejnika do pomiarów, będzie zależała od tego, czy mierzymy wartość temperatury jednocześnie mierząc wartość natężenia prądu płynącego przez grzejnik, czy też akurat jednocześnie mierzymy jego opór.[7]

Ad 2. Założenie, że danej wielkości fizycznej A można jednoznacznie przyporządkować *jeden i tylko jeden* operator samosprzężony $\widehat{A}$ jest gwarantem *określoności wartości* wielkości A. Jest to sytuacja, w której, w dowolnej chwili, wielkość A ma pewną określoną, i tylko jedną, wartość. Całkowita rezygnacja z tego założenia prowadzi do sytuacji, w której nie można powiedzieć nic o samych wartościach danej wielkości fizycznej — pozostają one nieokreślone. Trudność tę usiłuje się pokonać, zastępując odwzorowanie typu jeden–do–jednego odwzorowaniem typu wiele–do–jednego. Nie jest

[7] To obrazowe przedstawienie trudności nie bierze oczywiście pod uwagę pomiaru wielkości niekomutujących w teorii kwantów.

jednak do końca jasne, czy wówczas wiele wartości miałoby być opisanych przez ten sam operator, czy też wiele operatorów miałoby reprezentować tę samą wielkość.

Uwagi końcowe

Sytuacja jest niezmiernie interesująca. Jeżeli wielkości fizyczne, w dowolnej chwili, mają mieć określone wartości, niezależne od okoliczności ich badania (czy to w sposób doświadczalny, czy też w ramach obliczeń teoretycznych), to w ramach formalizmu teorii kwantów, opartego o przestrzenie Hilberta, postuluje się istnienie pewnej fukcji $V_{\vec{\psi}}$, co do której trzeba poczynić pewne założenia. Założenia te jednak, jeśli mają być utrzymywane konsekwentnie, prowadzą do sytuacji, w której istnienie takiej pożądanej funkcji jest niemożliwe. Wydaje się, że jest to sytuacja bez wyjścia. Wypada jednak przypomnieć o założeniach, które nie mają już natury *stricte* fizycznej, związane są jednak z codziennym doświadczeniem (czyli mają naturę, którą można by określić mianem klasycznej), i które leżą u podstaw postulatu istnienia funkcji $V_{\vec{\psi}}$.

Głównym impulsem poszukiwań funkcji $V_{\vec{\psi}}$ było przekonanie, że pragmatyczny obraz rzeczywistości jest niezadowalający (zwłaszcza, jeśli rozpatruje się teorię kwantów w kontekście kwantowej grawitacji). Pociąga to za sobą wniosek, że względnoczęstościową interpretację prawdopodobieństw, występujących w formalizmie teorii kwantów, należałoby zastąpić innym, bardziej realistycznym ujęciem. W tym celu poczyniono następujące założenia: 1) określone wartości wielkości fizycznych istnieją niezależnie od tego, czy akurat są mierzone, czy też nie (*określoność wartości*[8]); 2) gdy wielkości fizyczne są mierzone, ich wartości, mierzone dla idealnych kopii układu, który ma podlegać pomiarowi, nie zależą od okoliczności pomiaru (*niewrażliwość na kontekst pomiarowy*[9]), czyli zasadniczo nie powinny także zależeć od tego, z jakimi wielkościami są jednocześnie mierzone (oczywiście, z wyjątkiem wielkości

[8] Ang. *value definitness.*
[9] Ang. *non-contextuality.*

wchodzących w relacje nieoznaczoności). Twierdzenie Kochena–Speckera sprawia, że tak zdroworozsądkowe założenia, na obszarze mechaniki kwantowej nie są do utrzymania jednocześnie. Wypada zwrócić uwagę, że założenie 2) stoi u podstaw jakiejkolwiek pracy naukowej, w ramach której pomiary odgrywają znaczącą rolę. Jest to bardzo szczególne miejsce, w którym, w jakimś sensie, splatają się we wzajemnym oddziaływaniu możliwości penetracji doświadczalnej otaczającej nas rzeczywistości na poziomie kwantowym i formalizm samej teorii kwantów, który dostarcza przesłanek, że penetracja tego obszaru, tak teoretyczna[10], jak i doświadczalna, nie może być dowolna. Widać także, jak wielkie problemy napotyka każda próba konstrukcji nieco bardziej realistycznego obrazu otaczającej nas rzeczywistości, która to próba usiłuje się liczyć ze wskazówkami wypływającymi z teorii kwantów.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że problemy interpretacyjne, implikowane przez omawiane twierdzenie, znikają, gdy założy się, że interpretacja względnoczęstościowa jest zupełnie zadowalająca. Problem w tym, że takie podejście zakłada, iż wykonywane pomiary są nieczułe na kontekst pomiarowy, czyli że da się je bez problemu przeprowadzać, a wartości wielkości fizycznych pozostaną takie jak być powinny — niezależne od kontekstu pomiaru. Jednak implikacje twierdzenia Kochena–Speckera pokazują, że tak być nie musi — uderzają więc w podstawowe założenia dotyczące pomiaru. Widać zatem, że jego konsekwencje sięgają znacznie głębiej, dotykając nawet pewnych sposobów interpretacji wyników pomiarów.

Najbardziej uderzającą konsekwencją twierdzenia Kochena – Speckera, mającą związek z tym, co właśnie zostało powiedziane, jest bardzo poważne podważenie sensowności interpretacji ukrytych parametrów. Interpretacja ta zakłada istnienie takich funkcji, jak $V_{\vec{\psi}}$, które miałyby uzupełniać informacje o układzie kwantowym, zawarte w funkcji stanu ψ. Ponieważ interpretacje tego rodzaju wymagają jednoczesnego współistnienia obu warunków:

---

[10] Por. np. twierdzenie Stone'a – von Neumanna.

określoności wartości (na ten warunek kładziony jest szczególny nacisk) oraz niewrażliwości na kontekst pomiarowy, implikacje twierdzenia Kochena–Speckera sprawiają, że sens interpretowania teorii kwantów w sposób zaproponowany przez Bohma i jego kontynuatorów, staje się bardzo wątpliwy. Ponownie formalizm teorii kwantów pokazuje swą siłę i odmienność w stosunku do własności formalizmu fizyki klasycznej.

Bibliografia

[1] Isham, Ch. *Lectures on Quantum Theory. Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press, 1997

[2] Held, C. *Kochen – Specker Theorem*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy URL=<http://plato.stanford.edu/entries/kochen-specker/>