

Mateusz Hohol

Roger Penrose — *pitagorejszyk zespolony?*

Z uwagi na fakt jasnego artykułowania swoich preferencji filozoficznych przez Rogera Penrose'a, zagadnienie platonizmu matematycznego w jego twórczości zostało dość dobrze zbadane i doczekało się opracowań¹. Bardziej problematyczny i nie przebadany gruntownie, na co zwraca uwagę np. Zbigniew Król², pozostaje wciąż stosunek platonizmu matematycznego, w tym uprawianego przez Penrose'a, do poglądów głoszonych w kwestiach matematycznych przez samego Platona. Przy dokładniejszym przyjrzeniu się koncepcjom propagowanym przez autora *Nowego umysłu cesarza*³, może okazać się bowiem, że są one paradoksalnie bliższe pitagoreizmowi niż platonizmowi. Biorąc pod uwagę złożoność tego zagadnienia, które wymagałoby przede wszystkim dokładnego zbadania platońskich dialogów — najlepiej w oryginalnej wersji językowej, w niniejszej pracy podejmę się wskazania tylko kilku najbardziej jaskrawych różnic dzielących poglądy Platona i Penrose'a. Postaram się następnie pokazać, że poglądy Penrose'a na matematykę mogą być bardziej zbliżone do filozofii pitagorejskiej. Najpierw jednak przedstawiona zostanie „globalna” ontologia Penrose'a i miejsce, jakie zajmuje w niej matematyka.

¹Zob. np. K. Śleziński, *Elementy platonizmu u Rogera Penrose'a*, PAT, Kraków 1999.

²Z. Król, *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, IFiS PAN, Warszawa 2006, s. 26.

³R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, przeł. P. Amsterdamski, PWN, Warszawa 2000.

Ontologia Penrose'a: trzy światy

Roger Penrose przekonany jest o współistnieniu trzech światów: *świata matematyki*, *świata fizyki* i *świata umysłu*. Przekonanie to wyraża on najpełniej w swoim monumentalnym dziele *Droga do rzeczywistości*⁴. Pierwszy ze światów to *platoński świat matematycznych idei*. Mieści on w sobie byty takie jak np. liczby naturalne, liczby zespolone, równania Einsteina czy zbiory Mandelbrota. Obiekty te istnieją niezależnie od czasu, przestrzeni i ich poznania przez umysły matematyków. Mają zatem charakter absolutny. Penrose przekonany jest, że obiektywny sposób istnienia tych bytów najbardziej zbliżony jest do świata idei, o którym w swych dialogach pisał Platon. Drugim ze światów jest *świat fizyczny*, który opisywany jest przez mechanikę kwantową, fizykę klasyczną czy teorię względności. Składają się na niego obiekty takie jak: atomy, przedmioty materialne, organizmy żywe itd. Trzecim i ostatnim jest *świat umysłu*, wraz z fenomenami takimi jak *świadomość*, *inteligencja* i *rozumienie*. Ontologia postulowana przez Penrose'a zakłada, że każdy kolejny świat jest bogatszy od poprzedniego, wynikając jednocześnie tylko z jego niewielkiej części. Można zatem mówić o emergencji kolejnych światów. Fundamentem wszystkich obiektów fizycznych jest realnie istniejący świat bytów matematycznych. Tylko z części jego struktur wyłania się świat fizyczny, który równocześnie jest jakościowo bogatszy od matematyki. Świat umysłu wyłania się natomiast tylko z części struktur świata fizycznego. Struktury te związane są z budową mózgu i z koherentnymi zjawiskami kwantowymi, jakie zachodzą zdaniem Penrose'a w mikrotubulach cytoszkieletów komórek nerwowych⁵. Świadomy umysł ma możliwość *wglądu* w platoński świat bytów matematycznych, co stanowi domknięcie ontologii, która graficznie przedstawiana jest przez autora *Makroświata, mikroświata i ludzkiego*

⁴R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, przeł. J. Przysława, Prószyński i S-ka, Warszawa 2006, s. 988.

⁵Zob. np. W.P. Grygiel, M. Hohol, „Rogera Penrose'a kwantowanie umysłu”, *Filozofia nauki*, 3(67), 2009, ss. 5–31.

umysłu w formie tzw. „niemożliwego trójkąta”⁶. Penrose jest przekonany, że światy te nie są od siebie oddzielone, ale są częściami jednej, bogatszej struktury ontologicznej, o której nie mamy jeszcze pojęcia. Światy te połączone są także epistemologicznie: nie ma możliwości pełnego poznania jednego ze światów (np. świata fizycznego) bez uwzględnienia pozostałych (w tym wypadku świata matematyki i umysłu). Ontologia ta nie jest przypadkowa i pojawia się w kontekście poszukiwań Penrose’a przyszłej teorii unifikującej w ramach jednego formalizmu mikroświat z makroświatem. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż świat matematyki z jednej strony jest czymś koniecznym w stosunku do samego siebie i fundamentalnym dla rzeczywistości fizycznej, z drugiej jednak fizyczna rzeczywistość jest od niego jakościowo bogatsza:

(...) Podoba mi się myśl, że z tej trójki świat matematycznych idei Platona jest, w pewnym sensie, najbardziej prymitywny, ponieważ matematyka stanowi rodzaj konieczności, magicznie wyzaczarowując siebie siłą samej logiki⁷.

Filozofia matematyki Penrose’a i wiara w matematyczny fundament rzeczywistości powodowana wydaje się być przez dwa czynniki. Po pierwsze niebywałą *skuteczność* opisu zjawisk fizycznych przy pomocy matematyki (zmatematyzowane przyrodoznawstwo), po drugie zaś przez samo *doświadczenie* uprawiania matematyki, które Penrose uważa niemal za mistyczne przeżycie. Autor *Drogi do rzeczywistości* przekonany jest o matematycznym fundamencie świata. Twierdzi, że:

Im lepiej rozumiemy świat fizyczny, im głębiej poznajemy prawa natury, tym bardziej wydaje się nam, że świat fizyczny gdzieś

⁶R. Penrose i in., *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, przeł. P. Amsterdamski, M. Longair (red.), Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, ss. 139–140. Penrose twierdzi, iż „niemożliwość” jest cechą całej struktury rozważanej figury. Pomimo tego, problem daje się jednak analizować przy pomocy kohomologii, a więc ścisłych metod matematycznych.

⁷R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op. cit.*, s. 990.

wyparowuje i pozostaje nam tylko matematyka. Im głębiej rozumiemy prawa fizyki, tym dalej wkraczamy w świat matematyki i matematycznych pojęć⁸.

Ontologię Penrose'a, która u podstaw rzeczywistości stawia matematykę, można ulokować blisko koncepcji głoszonej przez Michała Hellera (*hipoteza matematyczności świata*)⁹.

Platonizm matematyczny a Platona poglądy na matematykę

Jak zostało wyżej powiedziane, platonizm matematyczny Penrose'a zakłada obiektywne istnienie bytów matematycznych. Obiekty należące do *świata matematyki* istnieją poza czasem, przestrzenią i umysłem. Są one czymś absolutnym i zastanym, ku czemu kieruje się aktywność badającego je podmiotu. Byty matematyczne są zatem odkrywane, a nie konstruowane przez umysł (jak twierdzili np. intuicjoniści¹⁰). Penrose mówi nawet o pojęciach matematycznych, jako o *danych przez Boga*, co podkreśla ich obiektywny charakter¹¹. Ważną kwestią poruszaną przez autora *Drogi do rzeczywistości* jest absolutny charakter *prawdy matematycznej*, która wyraża stałość, niezmienność i konieczność *relacji* pomiędzy obiektami należącymi do świata matematyki. Jeśli chodzi o dostęp do tej prawdy, Penrose twierdzi, że odbywa się na zasadzie platońskiego *wglądu*, który nie może być utożsamiany z operacjami algorytmicznymi. Ów *wgląd* w świat matematyki wymaga *rozumienia*. Penrose odrzuca poglądy formalistów, którzy na czele z Hilbertem chcieli ufundować matematykę na zbiorze aksjomatów, by móc później dedukować z nich niezawodnie każde z twierdzeń

⁸R. Penrose i in., *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, op. cit., ss. 18–19.

⁹Zob. np. M. Heller, *Filozofia i wszechświat*, Universitas, Kraków 2006, ss. 48–57.

¹⁰Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 2001, ss. 97–123.

¹¹R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, op. cit., s. 118.

systemu¹². Penrose, jako argument, przytacza twierdzenia limitacyjne Gödla. Wedle pierwszego z dwóch twierdzeń, w każdym formalnym systemie znajdują się poprawnie wyrażone w języku tego systemu zdania, których nie da się jednak dowieść w ujęciu formalnym (tzn. wychodząc od aksjomatów systemu). Mimo niemożności przeprowadzenia ścisłego dowodu jesteśmy jednak w stanie orzekać o prawdziwości tych zdań dzięki tzw. *zasadzie refleksji*¹³ nad aksjomatami i procedurami dowodowymi. Niemożność mechanicznego dowiedzenia prawdziwości zdań nie wyklucza zatem osiągnięcia prawdy matematycznej, która dostępna jest dzięki *rozumieniu*.

Oczywistym wydaje się stwierdzenie, iż nadanie przez Penrose'a swoim poglądom w kwestii matematyki miana *platonizmu*, służy przede wszystkim wyrażeniu absolutności istnienia obiektów matematycznych i odcięciu się od konkurencyjnych stanowisk w filozofii matematyki, takich jak wspomniane wcześniej formalizm i intuicjonizm (konstruktywizm). Jednak nie jest już tak oczywisty związek pomiędzy platonizmem a poglądami Platona. Opracowanie niniejsze, jak zostało zaznaczone już na wstępie, nie rości sobie pretensji do wypowiedzania kategoriycznych sądów w tej kwestii. Wydaje się jednak, że wskazanie kilku istotnych różnic pozwoli na rozważenie problematyki pitagorejskiej w myśli Penrose'a.

Teoria świata idei, głoszona przez Platona, powstała jako rozwiązanie greckiego problemu filozoficznego „jedno-wiele” (czy też „tożsamość-zmiana”). Jak wiadomo, Platon głosił dualistyczną ontologię dwóch światów: *świata absolutnych idei* i *świata materialnego*. Pełne istnienie przysługuje tylko pierwszemu ze światów, gdyż to właśnie idee są *stałe, niezmiennie* i *konieczne*. Drugi ze światów — świat materialny jest tylko *cieniem* pierwszego. Uczestniczy on w świecie idei, ale ze względu na swą *przemijalność, zmienność* i *przygodność*, można powiedzieć o nim, że *staje się*, ale nie, że *jest*. Człowiek ma dostęp do świata idei dzięki duszy (która utożsamia-

¹²Zob. np. R. Murawski, *op. cit.*, ss. 124–136.

¹³R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, *op. cit.*, s. 132.

na była przez Platona z umysłem¹⁴) z uwagi na jej pokrewieństwo ze światem absolutnych pojęć. Świat fizyczny natomiast poznawany jest zmysłowo. Według Platona, obydwa światy były od siebie oddzielone. Istniała więc pomiędzy nimi przepaść. Świat idei uważany był za bogatszy zarówno jakościowo, jak i ilościowo od świata fizycznego, gdyż bytowały w nim także powszechniki nieegzemplifikowane w świecie fizycznym. Świat fizyczny uznawany był przez Platona za gorszy i bardziej prymitywny od świata idei.

Światy w ontologii Penrose'a, w przeciwieństwie do światów Platona tworzą całość. Nie są one od siebie ontologicznie oddzielone. Relacje zachodzące pomiędzy nimi określane są przez Penrose'a jako *tajemnice*, ale mimo tego dają się one badać filozoficznie i w pewnym stopniu naukowo. Kolejną różnicą jest stwierdzenie przez Penrose'a, że świat idealnych pojęć jest *prymitywniejszy* od świata fizycznego. Matematyka jest wprawdzie fundamentem dla całej ontologii, jednak sama w sobie nie jest zdolna do wyłonienia świata umysłu. Konieczne jest pośrednictwo struktur świata fizycznego, który jest bogatszy niż świat bytów matematycznych. Stwierdzenie mówiące, iż świat idei jest prymitywniejszy niż świat zmysłowy, stoi zasadniczo w sprzeczności z powszechnie przyjętą interpretacją poglądów Platona. Nie do końca przekonywująca może wydawać się także analogia *rozumienia* w matematyce u Penrose'a z platońskim *wglądem* w świat idei. Warto zwrócić uwagę także na fakt, że niektórzy komentatorzy twierdzą, że wedle doktryny Platona byty matematyczne wcale nie zamieszkiwały świata idei, jak sądzi Penrose. Władysław Stróżewski przedstawia hierarchiczną ontologię Platona, wedle której byty matematyczne znajdują się pomiędzy bytami materialnymi a ideami, z których wyróżnia idee: Dobra, Piękna, Prawdy, Sprawiedliwości oraz idee wzorcze przedmiotów fizycznych¹⁵. Świat bytów matematycznych byłby zatem raczej *światem matryc*, które pośredniczą pomiędzy światem idei a światem fizycznym. Interpretację tę można potrak-

¹⁴Zob. np. J. Bremer, *Problem umysł-ciało*, WAM, Kraków 2001, s. 22.

¹⁵W. Stróżewski, *Ontologia*, Znak-Aureus, Kraków 2004, s. 233.

tować jako pewną próbę odpowiedzi na zarzut przyczynowej bezsilności świata idei w stosunku do świata fizycznego.

Wątki pitagorejskie u Penrose'a

Pitagoreizm matematyczny zakłada, że liczby są *arché* świata. Zbigniew Król twierdzi, iż: „Pitagoreizmem w filozofii matematyki nazwiemy pogląd głoszący, że przedmioty matematyki są częściami realnego świata lub realnymi przyczynami jego struktury ontycznej”¹⁶. Pitagoreizm i platonizm na gruncie filozofii matematyki mają wiele punktów stykowych i podobieństw. Punktem odróżnienia tych dwóch stanowisk jest problem *przyczynowości*. W pitagoreizmie liczby można uważać za realne przyczyny świata. Wedle Platona liczby nie są natomiast w stanie wytworzyć przestrzenności, czyli świata fizycznego¹⁷. Można stwierdzić zatem (pomijając interpretację Stróżewskiego przytoczoną w poprzednim akapicie), że nawet jeśli liczby istnieją w świecie Platona, to są one przyczynowo bezsilne, a więc epifenomenalne¹⁸. Doktryna pitagorejska nie wyróżniała dwóch oddzielonych od siebie światów — była ona *monistyczna*, co może być uważane za jeden z powodów realistycznego, czy nawet reistycznego pojmowania liczb. Pitagorejczycy tworzyli elitarny religijno-naukowy związek, a matematyka była otoczona przez nich wręcz religijnym kultem. Bezgranicznie wierzyli oni w skuteczność metody matematycznej — w szczególności wierzyli, że przy pomocy liczb naturalnych i ich stosunków, czyli liczb wymiernych, można opisać relacje między miarami obiektów fizycznych. Odkryli oni jednak, że nie wszystkie wielkości można przedstawić jako liczby wymierne. Odkrycie niewymierności wstrząsnęło

¹⁶Z. Król, *op. cit.*, s. 33.

¹⁷*Ibidem*, s. 34.

¹⁸Należy zauważyć, że bezsilność przyczynowa obiektów matematycznych prowadzi również do poważnych problemów natury teoriopoznawczej. Więcej na ten temat znaleźć można w: W.P. Grygiel, M. Hohol, „Teoriopoznawcze i kognitywistyczne wyzwania matematycznego platonizmu”, *Logos i Ethos*, 2 (27), 2009, ss. 25–44.

światopoglądem pitagorejczyków i zmusiło ich do uprawiania algebry geometrycznej¹⁹.

Mimo, iż Penrose wielokrotnie deklarował swoje poglądy w kwestii filozofii matematyki, stwierdzając np.: „Bynajmniej nie staram się ukryć faktu, że najbliższy jest mi platonizm (...)”²⁰, do potraktowania go raczej jako pitagorejczyka niż kontynuatora poglądów Platona skłania kilka argumentów. Autor *Drogi do rzeczywistości* widzi w matematyce faktyczną podstawę rzeczywistości fizycznej. Świat matematyki nie jest więc przez niego przywoływany tylko w celu poznania i opisu świata fizycznego, a więc tylko epistemologicznie. Ontologicznie świat fizyczny wynika ze świata matematyki, co zakłada pewną przyczynowość. Penrose twierdzi poza tym, że trzy światy w jego ontologii łączą się w jedną tajemniczą całość, co jest raczej argumentem na rzecz monistycznego pitagoreizmu niż dualistycznych poglądów Platona, wedle którego między światami znajduje się ontologiczna przepaść. Ważnym argumentem za uznaniem Penrose’a za współczesnego pitagorejczyka jest również niezwykle podziw dla liczb zespolonych i wiara, że to właśnie one są fundamentem dla budowy i opisu świata. W *Drodze do rzeczywistości* poświęca on cały rozdział tym obiektom i tytułuje go *Magia liczb zespolonych*²¹. Słowo „magia” pojawia się nieraz w treści tego rozdziału potęgując tylko wrażenie zachwytu Penrose’a nad liczbami zespolonymi i ich własnościami. Podaje on konstrukcję liczb tego typu (wprowadzenie wielkości „ i ”, której kwadrat jest równy -1 , dołączenie jej do systemu liczb rzeczywistych, co tworzy wyrażenia typu $a + ib$), wykłada podstawy algebry i przedstawia ich własności. Penrose pokazuje, jak za pomocą liczb zespolonych można z łatwością przedstawiać tak bogate strukturalnie obiekty jak np. zbiór Mandelbrota. Według Penrose’a, zbiór ten sam w sobie jest dowodem na to, że matematyka jest czymś obiektywnym, a nie tylko konstruktem ludzkiego umy-

¹⁹Zob. np. R. Murawski, *op. cit.*, s. 21.

²⁰R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, *op. cit.*, s. 138.

²¹R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op. cit.*, ss. 69–83.

słu. Penrose dostrzega wielką wagę liczb zespolonych w mechanice kwantowej, w obszarze której są nimi amplitudy, pojawiające się jako współczynniki w zasadzie superpozycji liniowej, prowadzącej do przestrzeni Hilberta. Amplitudy te mają związek z określeniem prawdopodobieństw wyniku pomiarów. Ponadto, jak starożytni pitagorejczycy wierzyli w skuteczność stosowania liczb naturalnych i wymiernych do opisu świata, tak Penrose wierzy, że struktura liczb zespolonych określa własności czasoprzestrzeni²². Autor *Drogi do rzeczywistości* opiera również na „magii liczb zespolonych” swą teorię twistorów, przy pomocy której chce on zunifikować mechanikę kwantową z teorią względności²³.

Podsumowanie

Pragnąc uniknąć generowania dodatkowej filozoficznej interpretacji, która nie wnosi wiele do rozumienia filozofii matematyki Penrose’a, należy wskazać na realną różnicę między platonizmem a pitagoreizmem matematycznym ze względu na konkretne kryterium. Pitagoreizm, w odróżnieniu od platonizmu twierdzi, że byty matematyczne ze względu na swoją realność mogą działać przyczynowo na byty fizyczne. Najlepszym przykładem współczesnego pitagorejczyka jest Max Tegmark, który w swej *Mathematical Universe Hypothesis*²⁴ twierdzi, że byty matematyczne są tak samo realne jak krzesła czy stoły. Przy odpowiednim poziomie abstrakcji, cały świat fizyczny można według niego uznać za byt matematyczny. Spór o to, czy Penrose’a umieścimy bliżej Tegmarka, czy raczej bliżej platonizmu matematycznego reprezentowanego np. przez Gödla²⁵, będzie przybierał zatem formę sporu o przy-

²²S. Hawking, R. Penrose, *Natura czasu i przestrzeni*, przeł. P. Amsterdamski, Zysk i S-ka, Poznań 1996, s. 114.

²³R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op. cit.*, s. 925.

²⁴M. Tegmark, „The Mathematical Universe”, [w:] *Cornell University Library, Arxiv.org*, dostęp online: 22.01.2010, <<http://arxiv.org/abs/0704.0646>>.

²⁵Zob. np. K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, OBI-Kraków, Biblos-Tarnów 2002.

czynowość. Jeśli świat matematyki wyznaczać ma pewne tendencje zachowania świata fizycznego, co zgodne jest z akceptacją *przyczyny celowej*, odwołanie się do platonizmu matematycznego będzie wystarczające. Jeśli natomiast w świecie matematyki widzieć chcemy przede wszystkim *przyczynę sprawczą* (w rozumieniu materialnym) świata fizycznego, powinniśmy zaakceptować stanowisko pitagorejskie.

Hipoteza uznania filozofii matematyki Penrose'a za pitagorejską, może zostać sfalsyfikowana po powstaniu solidnego opracowania, które porównywałoby platonizm(y) w matematyce z poglądami samego Platona, gdyż ich wzajemny stosunek pozostaje ciągle niejasny i niezbadany. Apodyktyczne „zaszufladkowanie” Penrose'a jako platonika bądź jako pitagorejczyka nie jest oczywiście filozoficznie wartościowe, tym bardziej, że Penrose sam nazywa się platonikiem. Badanie elementów pitagorejskich w myśli Penrose'a jest jednak jak najbardziej uprawnione, gdyż pozwala lepiej zrozumieć nie tylko wartość matematyki, jako narzędzia poznania świata, ale przede wszystkim ontologiczne zaangażowanie matematyki jako fundamentu dla świata fizycznego i świata umysłu.

Bibliografia

1. J. Bremer, *Problem umysł-ciało*, WAM, Kraków 2001.
2. W.P. Grygiel, M. Hohol, „Rogera Penrose'a kwantowanie umysłu”, *Filozofia nauki*, 3 (67), 2009.
3. W.P. Grygiel, M. Hohol, „Teoriopoznawcze i kognitywistyczne wyzwania matematycznego platonizmu”, *Logos i Ethos*, 2 (27), 2009.
4. S. Hawking, R. Penrose, *Natura czasu i przestrzeni*, przeł. P. Amsterdamski, Zysk i S-ka, Poznań 1996.
5. M. Heller, *Filozofia i wszechświat*, Universitas, Kraków 2006.

6. Z. Król, *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, IFiS PAN, Warszawa 2006.
7. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 2001.
8. R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, przeł. J. Przysława, Prószyński i S-ka, Warszawa 2006.
9. R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, przeł. P. Amsterdamski, PWN, Warszawa 2000.
10. R. Penrose i in., *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, przeł. P. Amsterdamski, M. Longair (red.), Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
11. W. Stróżewski, *Ontologia*, Znak-Aureus, Kraków 2004.
12. K. Śleziński, *Elementy platonizmu u Rogera Penrose'a*, PAT, Kraków 1999.
13. M. Tegmark, „The Mathematical Universe”, [w:] *Cornell University Library, Arxiv.org*, dostęp online: 22.01.2010, <<http://arxiv.org/abs/0704.0646>>.
14. K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, OBI-Kraków, Biblos-Tarnów 2002.

Abstract

Roger Penrose — *pythagorean of complex numbers?*

Roger Penrose's philosophy of mathematics reaches beyond what is normally understood as mathematical platonism. In this article, the pythagorean threat in Penrose's philosophy of mathematics is reflected upon. Firstly, Roger Penrose's three worlds "global" ontology is presented. Secondly, basic differences between mathematical platonism and original platonic concept of mathematics are pointed out, followed

by the demonstration of the pythagoreist clue in Penrose's philosophy. From the data presented, it can be concluded that the primary criterion of the distinction between mathematical platonism and mathematical pythagoreanism is, as it appears, the category of causality. In platonism, the mathematical entities are considered as epiphenomenal whereas in pythagoreism as real causes of the physical world.

Keywords: Roger Penrose, complex numbers, philosophy of mathematics, mathematical platonism, mathematical pythagoreanism.